

I. megoldás. A feladat „csak akkor” részét bizonyítjuk, a másik irány úgyszólván nyilvánvaló. Tegyük fel indirekt módon, hogy k sem az n -et, sem az m -et nem osztja, és az $n \times m$ -es táblát mégis le tudtuk fedni $k \times 1$ -es dominókkal. Legyen $n = ak + b$ és $m = ck + d$, ahol a, b, c, d egészek és $0 < b, d < k$. Számozzuk be a tábla mezőit az első k darab természetes számmal oly módon, hogy az i . sor j . mezőjére $(i + j - 2)$ -nek k -val vett osztási maradékát írjuk. (1. ábra). Világos, hogy a fedésben részt vevő dominók midegyike k darab különböző számot fed le, függetlenül attól, hogy vízszintes vagy függőleges helyzetben van. Ezért a táblán minden szám ugyanannyiszor fordul elő. A táblából vágjunk le jobbról egy $(ak) \times m$ nagyságú részt, ekkor minden szám előfordulását ugyanannyival csökkentettük, hiszen a levágott rész lefedhető $k \times 1$ -es dominókkal. Mivel a maradék $b \times m$ -es táblán ugyanannyiszor szerepel minden szám, azért ha ebből alulról még egy $b \times (ck)$ -as részt is levágunk, akkor a fennmaradó $b \times d$ nagyságú táblán is ugyanannyiszor szerepelnek a számok 0-tól $(k - 1)$ -ig. Megmutatjuk, hogy ez nem igaz. Az általánosságnak nem megy rovására, ha felteszzük, hogy $0 < d \leq b < k$. Ekkor a $b - 1$ szám minden sorban szerepel, tehát pontosan d darab van belőle a táblán, a második sorban azonban nem szerepel a 0, tehát 0-ból legfeljebb $d - 1$ darab lehet a táblán (2. ábra). Ellentmondásra jutottunk, ami a feladatbeli állítást igazolja.

II. megoldás. Az előző megoldás ötletét komplex számokkal ötvözve még gyorsabban célhoz érhetünk. Legyen ugyanis $\varepsilon = \cos(2\pi/k) + i \sin(2\pi/k)$ az első k -adik egységgyök, és tegyük fel, hogy az $n \times m$ -es táblát lefedtük $k \times 1$ -es dominókkal. Ha a tábla mezőit oly módon töltjük ki komplex számokkal, hogy az r . sor s . mezőjére az ε^{r+s-2} egységgyököt írjuk, akkor minden $k \times 1$ -es dominó a k . egységgyökök egy teljes rendszerét fedi le, amelyeknek 0 az összegük. Így a táblán lévő összes egységgyökök is 0-t adnak összegül, azaz

$$0 = \sum_{\substack{1 \leq r \leq n \\ 1 \leq s \leq m}} \varepsilon^{r+s-2} = \left(\sum_{r=1}^n \varepsilon^{r-1} \right) \cdot \left(\sum_{s=1}^m \varepsilon^{s-1} \right) = \frac{1 - \varepsilon^n}{1 - \varepsilon} \cdot \frac{1 - \varepsilon^m}{1 - \varepsilon}.$$

Az egyenlőség két oldalát összehasonlítva kapjuk, hogy $\varepsilon^n = 1$ vagy $\varepsilon^m = 1$, azaz $k \mid n$ vagy $k \mid m$.