A Matematikai Lapok 32. évfolyamának (1981-1985) 4. számában szerepel a fenti feladat.

Nyilván feltehetjük, hogy $\log x$ az $x$ szám ($x > 0$) $e$ alapú logaritmusát jelöli. A tétel – könnyen ellenőrizhető – $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ esetén teljesül, ezért mi a továbbiakban az $n \geq 9$ esettel foglalkozunk. Számolással könnyen igazolható, hogy

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{6} > \log 7 + \frac{1}{2}. \tag{2}$$

(A bal oldalon 2,45 áll, a jobb oldalon kb. 2,446.) Mivel az $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ függvény szigorúan monoton fogyó a pozitív számokon, és $n - 2 \geq 7$, azért

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{n-2} \geq \int_7^{n-1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log(n-1) - \log 7,$$

amit $\dfrac{1}{n-1}$-gyel megnövelve, majd (2)-höz hozzáadva:

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} > \log(n-1) + \frac{1}{2} + \frac{1}{n-1} > \log(n-1) + \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Alakítsuk most át (1)-et ekvivalens lépésekkel!

$$\frac{\log(n+1)}{\log n} > \frac{\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right)} = 1 + \frac{1}{n\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right)}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} > \frac{\log n}{n\left[\log(n+1) - \log n\right]} = \frac{\log n}{n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}.$$

(3) szerint ennek bal oldala nagyobb, mint $\log(n-1) + \dfrac{1}{2}$, ezért elég belátnunk, hogy

$$\log(n-1) + \frac{1}{2} > \frac{\log n}{n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \tag{4}$$

Legyen $g(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$, ha $x > 0$. Ismeretes, hogy $g(x)$ szigorúan monoton fogyó, és hogy $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = e$, ezért $g(x) > e$ mindig fennáll. Ennek alapján

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > e$$

$$(n+1) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 1, \qquad \text{azaz}$$

$$1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} > \frac{1}{n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}, \qquad \text{ahonnan}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) \log n > \frac{\log n}{n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}.$$

Azt kaptuk, hogy (4) jobb oldala kisebb, mint $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \log n$, ezért elég igazolnunk, hogy

$$\log(n-1) + \frac{1}{2} > \left(1 + \frac{1}{2}\right) \log n, \qquad \text{amit átalakítva}$$

$$\log\left[\sqrt{e}(n-1)\right] > \log n^{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \log\left(n - n^{\frac{1}{n}}\right) \tag{5}$$

$$\sqrt{e}(n-1) > n - n^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt{e} > \frac{n}{n-1} \cdot n^{\frac{1}{n}}.$$

Legyen most $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, ha $x > 0$. Némi számolással adódik, hogy

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x^2}(1 - \log x) = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \log x).$$

Mivel $x^{\frac{1}{x}-2} > 0$, azért $f'(x) < 0$, ha $1 - \log x < 0$, azaz ha $e < x$. Ez azt jelenti, hogy $f(x)$ szigorúan monoton fogyó az $x > e$ számokon, vagyis

$$n^{\frac{1}{n}} \leq 9^{\frac{1}{3}}, \qquad \text{hiszen} \qquad n \geq 9 > e. \tag{6}$$

Mivel $x > 0$ esetén az $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ függvény szigorúan monoton fogyó, azért ugyanilyen az $x \mapsto \dfrac{1}{1-\frac{1}{x}} = \dfrac{x}{x-1}$ függvény is, tehát $n \geq 9$ miatt

$$\frac{n}{n-1} \leq \frac{9}{8}.$$

Ennek és (6)-nak a bal oldalán pozitív számok állnak, azaz összeszorozva őket $\dfrac{n}{n-1} \cdot n^{\frac{1}{n}} \leq \dfrac{9}{8} \cdot 9^{\frac{1}{9}}$ fennáll, és így (5) helyett elegendő megmutatnunk, hogy telsejül a

$$\sqrt{e} > \frac{9}{8} \cdot 9^{\frac{1}{9}}$$

egyenlőtlenség. Numerikus becsléssel könnyen igazolható, hogy ez valóban fennáll, és így igaz az (1) egyenlőtlenség is. ($\sqrt{e} \approx 1,65$; $\quad \dfrac{9}{8} \cdot 9^{\frac{1}{9}} \approx 1,44$)

Ezzel a bizonyítást befejeztük.