Tetszőleges $\mathcal{M}$ és $\mathcal{N}$ pozitív egészekből álló halmaz esetén jelölje $\mathcal{M}+\mathcal{N}$ az

$$\mathcal{M}\cup\mathcal{N}\cup\{m+n : m\in\mathcal{M}, n\in\mathcal{N}\}$$

halmazt, és definiáljuk sorra az $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \dots$ halmazokat az

$$\mathcal{A}_0=\mathcal{A}$$
$$\mathcal{A}_{i+1}=\mathcal{A}_i+\mathcal{A}_i \qquad (i=0,1,\dots)$$

rekurzióval. Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{A}_i$ mindazokat a pozitív egészeket tartalmazza, amelyek legfeljebb 2^i darab$\mathcal{A}$-beli elem összegeként előállnak (egytagú összegen magát a tagot értjük). Ha a feladatbeli feltétel teljesül, akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ α-sűrű. Ezzel a szóhasználattal és eddigi jelöléseinkkel élve a feladat annak a bizonyítása, hogy alkalmas i-re $\mathcal{A}_i$ már 1-sűrű.

1. Lemma. Ha $\mathcal{M}$ és $\mathcal{N}$ pozitív egészekból álló halmaz, továbbá $\mathcal{M}$ μ-sűrű és $\mathcal{N}$ ν-sűrű $(\mu,\nu\geq 0)$, akkor $\mathcal{M}+\mathcal{N}$ $(\mu+\nu-\mu\nu)$-sűrű.

Bizonyítás. Vezessük be minden pozitív egész x esetén az

$$M(x)=|\mathcal{M}\cap\{1,2,\dots,x\}| \qquad \text{és} \qquad N(x)=|\mathcal{N}\cap\{1,2,\dots,x\}|$$

jelöléseket, akkor nyilván $M(x)\geq\mu x$ és $N(x)\geq\nu x$ a feltétel szerint. Ha $\mu=0$ vagy $\nu=0$, akkor semmitmondó az állítás. Tegyük fel ezért, hogy $\mu,\nu>0$, ekkor $M(1)\geq\mu>0$ és $N(1)\geq\nu>0$, azaz 1 eleme $\mathcal{M}$-nek és $\mathcal{N}$-nek. Most tehát tetszőleges pozitív egész x esetén az $\mathcal{M}+\mathcal{N}$ halmazhoz tartoznak az alábbi *különböző* $\{1,2,\dots,x\}$-be eső számok:

1) Az $\mathcal{M}$-ből választott $1=m_1<m_2<\dots<m_{M(x)}$ egészek; ezek száma $M(x)$.

2) Minden $1\leq i<M(x)$ esetén az m_i+n alakú egészek, ahol $n\in\mathcal{N}$ és $0<n<m_{i+1}-m_i$; ezek száma $N(m_{i+1}-m_i-1)$.

3) Az $m_{M(x)}+n$ alakú egészek, ahol $n\in\mathcal{N}$ és $0<n\leq x-m_{M(x)}$; ezek száma $N(x-m_{M(x)})$.

Mindezek alapján

$$|(\mathcal{M}+\mathcal{N})\cap\{1,2,\dots,x\}|\geq$$

$$\geq M(x)+N(m_2-m_1-1)+N(m_3-m_2-1)+\dots$$
$$\dots+N(m_{M(x)}-m_{M(x)-1}-1)+N(x-m_{M(x)})\geq$$

$$\geq M(x)+\nu(m_2-m_1-1)+\nu(m_3-m_2-1)+\dots$$
$$\dots+\nu(m_{M(x)}-m_{M(x)-1}-1)+\nu(x-m_{M(x)})\geq$$
$$\geq M(x)+\nu(x-M(x))=\nu x+(1-\nu)M(x)\geq\nu x+(1-\nu)\mu x=(\mu+\nu-\mu\nu)x,$$

és ezt kellett igazolnunk.

2. Lemma. Ha $\mathcal{M}$ és $\mathcal{N}$ pozitív egészekből álló halmaz, továbá $\mathcal{M}$ μ-sűrű és $\mathcal{N}$ ν-sűrű $(\mu,\nu\geq 0)$, ahol $\mu+\nu\geq 1$, akkor $\mathcal{M}+\mathcal{N}$ 1-sűrű.

Bizonyítás. Használjuk az előző lemma bizonyításának jelöléseit. Ha $\mu=0$, akkor $\nu=1$, vagyis már $\mathcal{N}$ is 1-sűrű. Legyen ezért $\mu>0$, és x tetszőleges pozitív egész. Azt kell megmutatnunk, hogy $x\in\mathcal{M}+\mathcal{N}$. Ha $x\in\mathcal{M}$, akkor készen vagyunk. Egyébként pedig $x>1$ és

$$M(x-1)=M(x)\geq\mu x>\mu(x-1) \qquad \text{és} \qquad N(x-1)\geq\nu(x-1).$$

Ezek szerint az $\{1,2,\dots,x-1\}$ halmazba több, mint $\mu(x-1)$ darab $\mathcal{M}$-beli, és legalább $\nu(x-1)$ darab $\mathcal{N}$-beli szám esik. Mivel $\mu(x-1)+\nu(x-1)\geq x-1$, azért a skatulyaelvet használva az $x-n$ $(n\in\mathcal{N}, n\leq x-1)$ alakú számok egyike megegyezik egy $\mathcal{M}$-beli m számmal. Ez viszont éppen azt jelenti, hogy x $m+n$ alakú, ahol $m\in\mathcal{M}$ és $n\in\mathcal{N}$.

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Megjegyzés. A bizonyítás csekély módosításával az is igazolható, hogy minden pozitív egész szám előáll legfeljebb C darab $\mathcal{A}$-beli elem összegeként, ha

$$C=2\left\lceil\frac{\log 2}{\log\frac{1}{1-a}}\right\rceil.$$