

Tegyük fel, hogy  $f_1$ , ill.  $f_2$  a háromszög  $a$ , ill.  $c$  oldalához tartozik, ekkor ismeretes, hogy

$$f_1^2 = bc \left( 1 - \left( \frac{a}{b+c} \right)^2 \right) = \frac{bc}{(b+c)^2} ((b+c)^2 - a^2),$$

amiből

$$2f_1 \leq \sqrt{(b+c)^2 - a^2}$$

következik. Hasonlóan

$$2f_2 \leq \sqrt{(a+b)^2 - c^2},$$

és azt is tudjuk, hogy

$$2s_3 = \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2},$$

végző soron tehát elegendő a következőt bizonyítanunk:

$$\begin{aligned} \sqrt{(b+c)^2 - a^2} + \sqrt{(a+b)^2 - c^2} + \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} &\leq \sqrt{3}(a+b+c), \quad \text{azaz} \\ \left[ \sqrt{(b+c)^2 - a^2} + \sqrt{(a+b)^2 - c^2} \right]^2 &\leq \left[ \sqrt{3}(a+b+c) - \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} \right]^2. \end{aligned}$$

(Az utolsó két egyenlőtlenség egyenértékű, hiszen – amint az könnyen végigondolható – a szögletes zárójelekben nemnegatív számok állnak.) A két oldalon a négyzetreemelést elvégezve, majd a kapott tagokat megfelelően átrendezve:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{[(b+c)^2 - a^2][(a+b)^2 - c^2]} + 2\sqrt{3}(a+b+c)\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} &\leq \\ &\leq 5a^2 + 5c^2 + 4ab + 4bc + 6ac, \quad \text{ill.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(a+b+c) \left[ \sqrt{(b+c-a)(a+b-c)} + \sqrt{3}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} \right] &\leq \\ &\leq 5a^2 + 5c^2 + 4ab + 4bc + 6ac. \end{aligned}$$

A bal oldali szögletes zárójelben lévő összeget felülről becsülhetjük a súlyozott számtani és négyzetes közép között fennálló egyenlőtlenség segítségével:

$$\begin{aligned} \sqrt{(b+c-a)(a+b-c)} + \sqrt{3}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} &= \sqrt{b^2 - a^2 + 2ac - c^2} + \\ + 3\sqrt{\frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{3}} &= 4 \frac{\sqrt{b^2 - a^2 + 2ac - c^2} + 3\sqrt{\frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{3}}}{4} \leq \\ &\leq 4\sqrt{\frac{b^2 - a^2 + 2ac - c^2 - 3\frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{3}}{4}} = 4\sqrt{\frac{a^2 + 2ac + c^2}{4}} = 2(a+c), \end{aligned}$$

vagyis elegendő a következőt belátnunk:

$$2(a+b+c) \cdot 2(a+c) \leq 5a^2 + 5c^2 + 4ab + 4bc + 6ac.$$

Ennek átrendezése viszont a nyilvánvaló

$$0 \leq a^2 - 2ac + c^2$$

egyenlőtlenséget adja. Ezzel a feladatot megoldottuk.

*Megjegyzés.* A levezetésből az is kiderül, hogy egyenlőség pontosan  $a = b = c$  esetén, azaz szabályos háromszögnél áll fenn.