Húzzuk meg az összes, a sokszög valamely csúcsán áthaladó és a területet felező szakaszt. Nyilvánvaló, hogy közülük bármely kettő metszi egymás a sokszög belsejében. Ellenkező esetben ugyanis az általuk és a sokszög határa által közrefogott síkidom területe nulla kell hogy legyen (hiszen területfelezőkről van szó).

Két ilyen területfelező szakaszt akkor nevezünk szomszédosnak, ha megfelelő végpontjaik szomszédosak a sokszög kerületén.

1. ábra *2. ábra*

Legyenek ilyenek pl. az A_1A_2 és B_1B_2 szakaszok (az *1. ábra* szerint). Ez nyilván azt is jelenti, hogy A_1 és B_1 (illetve A_2 és B_2) között a sokszögnek nincs csúcsa – éppen a szomszédosság miatt. Ha az A_1A_2 és B_1B_2 szakaszok metszéspontja P, az A_1PB_1 szög pedig α, akkor belátjuk, hogy

$$T_{A_1PB_1}+T_{A_2PB_2}\le\frac{1}{4}\cdot\sin\alpha.$$

Vegyük észre először, hogy $T_{A_1PB_1}=T_{A_2PB_2}$, ez az A_1A_2 és B_1B_2 szakaszok területfelező tulajdonságából következik, amint ezt az ábra szemlélteti:

$$T_{A_1B_1P}=\frac{T}{2}-T_2,\qquad T_{A_2B_2P}=\frac{T}{2}-T_1\qquad\text{és}\qquad T_1=T_2$$

Ezek szerint

$$\frac{A_1P\cdot PB_1\cdot\sin\alpha}{2}=\frac{A_2P\cdot PB_2\cdot\sin\alpha}{2}.$$

Innen $A_1P\cdot PB_1=A_2P\cdot PB_2$. A feladat feltétele szerint $A_1P+PA_2\le 1$ és hasonlóan $B_1P+PB_2\le 1$. Mivel itt pozitív(nemnegatív) értékekről van szó, használhatjuk a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget:

$$A_1P\cdot PA_2\le\frac{1}{4}\qquad\text{és}\qquad B_1P\cdot PB_2\le\frac{1}{4}.$$

Összeszorzás és rendezés után:

$$\frac{1}{16}\ge(A_1P\cdot PB_1)(A_2P\cdot PB_2)=(A_1P\cdot PB_1)^2,$$

azaz

$$\frac{1}{4}\ge A_1P\cdot PB_1.$$

Innen pedig

(1) $$T_{A_1PB_1}+T_{A_2PB_2}=\frac{1}{2}\sin\alpha\,[A_1P\cdot PB_1+A_2P\cdot PB_2]\le\frac{1}{4}\sin\alpha.$$

Ezután megmutatjuk, hogy az oly módon definiált háromszögek, mint az A_1PB_1 és A_2PB_2, lefedik az egész sokszöget. Legyen a sokszög egyik belső pontja Q (*2.ábra*). Vizsgáljuk először azt, hogy Q az A_1A_2 területfelező melyik oldalán van. Majd ezen az oldalon maradva induljunk tovább A_1-ből a sokszög kerületén, amíg egy újabb területfelező szakasz egyik végpontjához nem érünk. Most is abba az irányba menjünk tovább, amelyik oldalra Q esik. Látható, hogy így Q beszorítható két szomszédos területfelező „közé", tehát valóban lefedi valamelyik kívánt alakú háromszög.

Becsüljük most az (1) segítségével az ilyen háromszögek területének összegét:

(2) $$T_{\text{sokszög}}\le\sum T_{\text{háromszögek}}\le\frac{1}{4}(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\dots+\sin\alpha_n).$$

Fontos észrevétel, hogy $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n=\pi$ (hiszen ez úgy is felfogható, hogy az A_1A_2 egyenest α_1, majd $\alpha_2,\dots,\alpha_n$ szögekkel forgatom el, s végül az A_2A_1-hez jutok.)

Mivel a szinuszfüggvény a $[0,\pi]$ intervallumon konkáv, használhatjuk a Jensen-egyenlőtlenséget:

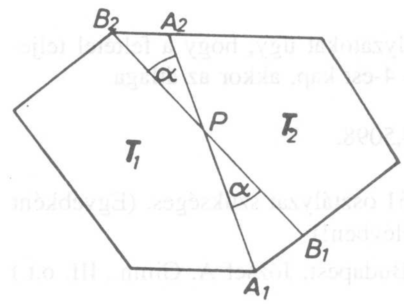
$$\frac{\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\dots+\sin\alpha_n}{n}\le\sin\left(\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_n}{n}\right)=\sin\frac{\pi}{n}<\frac{\pi}{n}.$$

Az utolsó lépésnél kihasználtuk a pozitív x-ekre (és a $\frac{\pi}{n}$ ilyen) teljesülő, ismert $\sin x<x$ egyenlőtlenséget. Innen:

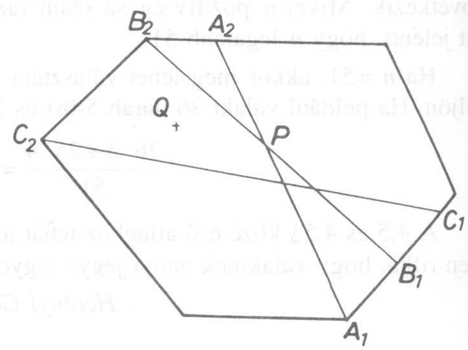
$$\frac{1}{4}(\sin\alpha_1+\dots+\sin\alpha_n)<\frac{\pi}{4}.$$

Ez pedig (2)-vel összevetve épp a bizonyítandó állítást adja.

Szeidl Ádám (Miskolc, Földes F. Gimn., IV. o.t.)



B_2
A_2
α
P
T_1
T_2
α
B_1
A_1



B_2
A_2
Q
P
C_2
C_1
B_1
A_1