Jelöljük a háromszög oldalait és szögeit a szokásos módon $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$-val (lásd az *ábrát*). A szögfelezőtétel serint $CQ = \dfrac{ab}{a+c}$ és $CP = \dfrac{ab}{b+c}$. Írjuk fel a CQP háromszögben a koszinusztételt a PQ oldalra:

$$PQ^2 = \left(\frac{ab}{a+c}\right)^2 + \left(\frac{ab}{b+c}\right)^2 - 2\frac{(ab)^2}{(a+c)(b+c)}\cos\gamma. \tag{1}$$

Az ABC háromszög a oldalára vonatkozó koszinusztételből:

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Ezt (1)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$PQ^2 = \left(\frac{ab}{a+c}\right)^2 + \left(\frac{ab}{b+c}\right)^2 - \frac{ab(a^2+b^2-c^2)}{(a+c)(b+c)}. \tag{2}$$

Megmutatjuk, hogy $PQ \le AQ \cdot BP$. Ez a szögfelezőtétel és (2) szerint pontosan akkor teljesül, ha

$$\left(\frac{ab}{a+c}\right)^2 + \left(\frac{ab}{b+c}\right)^2 - \frac{ab(a^2+b^2-c^2)}{(a+c)(b+c)} \le \frac{bc}{a+c}\cdot\frac{ac}{b+c}.$$

Az egyenlőtlenséget $a \cdot b$-vel elosztva és rendezve kapjuk, hogy

$$\frac{a\cdot b}{(a+c)^2} + \frac{ab}{(b+c)^2} \le \frac{a^2+b^2}{(a+c)(b+c)}.$$

Megszorozva $\dfrac{(a+c)(b+c)}{a\cdot b}$-vel:

$$\frac{b+c}{a+c} + \frac{a+c}{b+c} \le \frac{b}{a} + \frac{a}{b}.$$

Ezt rendezve pedig nyilvánvalóan az igaz

$$0 \ge \frac{a(b-a)^2(a+b+c)}{a\cdot b\cdot(a+c)(b+c)}$$

egyenlőséget kapjuk.

A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség alapján $\sqrt{AQ\cdot BP} \le \dfrac{AQ+BP}{2}$, vagyis $PQ \le \dfrac{AQ+BP}{2}$. Ugyanígy láthatjuk be, hogy $QR \le \dfrac{CQ+RB}{2}$ és $RP \le \dfrac{AR+PC}{2}$. E három egyenlőtlenséget összeadva éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

Hanyecz Péter, Budapest

Megjegyzés. A példa F.2977. feladatnak a nehezebben megoldható „párja”.