

Megmutatjuk, hogy az  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, \dots, a_n = 2^{n-1}$  választás minden  $\alpha$ -ra megfelelő. Az  $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq 2^{n-1}$  feltétel teljesül, elég (1)-et igazolnunk.

Tekintsük az  $\alpha a_1, \alpha^2 a_2, \dots, \alpha^n a_n$  sorozatot. Mivel minden  $1 \leq k \leq n$ -re  $\alpha^k a_k = 2^{k-1} \alpha^k$ , ez egy mértani sorozat, amelynek elemei pozitívak, első eleme  $\alpha a_1 = \alpha$ , hányadosa pedig  $2\alpha$ . Most két részre bontjuk a bizonyítást aszerint, hogy ez a hányados nagyobb 1-nél, illetve kisebb 1-nél.

I. Ha  $2\alpha > 1$ , akkor a sorozat szigorúan monoton nő:

$$\alpha a_1 < \alpha^2 a_2 < \dots < \alpha^n a_n.$$

Mivel az egészrész-függvény monoton nő, ebből következik, hogy

$$[\alpha a_1] < [\alpha^2 a_2] < \dots < [\alpha^n a_n].$$

Ebben az esetben tehát állításunk igaz.

II. Ha  $2\alpha \leq 1$ , akkor a sorozat monoton fogy:

$$\alpha a_1 \geq \alpha^2 a_2 \geq \dots \geq \alpha^n a_n.$$

Viszont tudjuk, hogy  $\alpha a_1 = \alpha < 1$  (sőt, a feltételünk szernit  $\alpha \leq \frac{1}{2}$ ), ezért a sorozat minden eleme 0 és 1 közé esik, következésképpen

$$[\alpha a_1] = [\alpha^2 a_2] = \dots = [\alpha^n a_n] = 0.$$

Az (1) feltétel tehát ebben az esetben is teljesül.