Legyen a két játékos $A$ és $B$ ($A$ a kezdő). Mivel összesen 9 együtthatót írnak be, az utolsó számot $A$, az utolsó előttit $b$ fogja kiválasztani. (Éppen ezért $A$ könnyen el tudná érni, hogy a polinomnak legyen gyöke, de a feladatban épp ezt akarja megakadályozni.)

Először megjegyezzük, hogy a végeredményként kapott polinom felvesz pozitív értékeket, mert a legmagasabb fokú tagja, $x^{10}$, páros kitevőjű és pozitív együtthatójú. Ezért (a Bolzano-tétel alapján, felhasználva a polinom folytonosságát) a polinomnak akkor és csak akkor van gyöke, ha felvesz nem pozitív értéket is.

$A$ célja tehát az, hogy a polinom csak pozitív értékeket vegyen fel, $B$ célja pedig az, hogy felvegyen nem pozitív értéket is.

Legyen a 7 lépés után kialakuló polinom (a két hiányzó tag nélkül) $f(x)$, az utolsó két tag $bx^\beta$ (a $b$-t $B$ írja be) és $ax^\alpha$ (az $a$-t pedig $A$). A végeredmény:

$$f(x) + bx^\beta + ax^\alpha. \tag{1}$$

Most $\alpha$ és $\beta$ párosságától függöen három esetet vizsgálunk:

I. eset: $\alpha$ páros. Megmutatjuk, hogy ilyenkor $A$-nak van nyerő stratégiája. Legyen $g(x) = f(x) + bx^\beta$. Most $A$-nak egy olyan $a$ számot kell választania, amelyre $g(x) + ax^\alpha$ minden $x$-re pozitív.

Mivel $g$ folytonos és $g(0) = 1$, ezért létezik olyan $r > 0$ szám, hogy $g$ a $(-r, r)$ intervallumban pozitív. Mivel pedig $g$ $+\infty$-ben és $-\infty$-ben végtelenhez tart, létezik olyan $R > 0$ szám, hogy $g$ a $(-\infty, R)$ és $(R, +\infty)$ intervallumokban is pozitív. Mivel $r$-et szabadon kicserélhetjük egy kisebb, $R$-et pedig egy nagyobb számra, felhetetjük, hogy $r < R$.

Legyen a $g$ függvény minimuma a kimaradó $H = [-R, -r] \cup [r, R]$ halmazon $m$ (ld. az *ábrát*). (Mivel $g$ folytonos, $H$ pedig nem üres, korlátos és zárt, a Weierstrass-tétel szerint a minimum létezik.) Ha $m > 0$, akkor ez azt jelenti, hogy $g$ a $H$ halmazon is pozitív, tehát pl. $a = 0$ egy megfelelő választás. Tegyük fel ezért, hogy $m \le 0$.

A $H$ halmazon $|x| \ge r$, ezért ($\alpha$ párossága miatt) $x^\alpha = |x|^\alpha \ge r^\alpha$. Ha $a$-t úgy választjuk, hogy $m + ar^\alpha > 0$ legyen (ebből az is következik, hogy $a > 0$), akkor (1) mindenhol pozitív lesz, ugyanis

$H$-n kívül $g(x) + ax^\alpha \ge g(x) > 0$,

$H$-n pedig $g(x) + ax^\alpha \ge m + ar^\alpha > 0$.

Az $\alpha$-ra egy jó választás pl. $a = \dfrac{|m|}{r^\alpha} + 1$.

II. eset: $\beta$ páros, $\alpha$ páratlan.

Azt állítjuk, hogy ebben az esetben $B$-nek van nyerő stratégiája.

Legyen $b = \dfrac{f(1) + f(-1)}{2}$. Ezzel a választással $B$ eléri, hogy a végeredmény az 1-ben és a $(-1)$-ben ne lehessen egyszerre pozitív. Legyen ugyanis $f(x) + bx^\beta + ax^\alpha = g(x)$.

Ekkor

$$g(1) + g(-1) = (f(1) + b + a) + (f(-1) + b - a) = f(1) + f(-1) + 2b = 0.$$

A $g(1)$ és $g(-1)$ számok tehát, $a$ választásától függetlenül, nem lehetnek egyszerre pozitívak.

III. eset: $\beta$ és $\alpha$ is páratlan. Bebizonyítjuk, hogy ebben az esetben is $B$-nek van nyerő stratégiája, nevezetesen azt állítjuk, hogy ha $b$-t elég nagy abszolút értékűnek választja $B$, akkor tetszőleges $a$ esetén az (1) polinom az 1, $-1$, 2, $-2$ helyek közül legalább az egyiken negatív értéket vesz föl.

Legyen továbbra is $g(x) = f(x) + bx^\beta + ax^\alpha$, és legyen

$$M = \max(|f(1)|, |f(-1)|, |f(2)|, |f(-2)|).$$

Tegyük fel, hogy $g(1), g(-1), g(2), g(-2) \ge 0$; ebből $|b|$-re egy felső becslést fogunk kapni.

A feltevéseink alapján, felhasználva, hogy $\alpha$ és $\beta$ páratlanok:

$$0 \le g(1) \le M + b + a \tag{2}$$
$$0 \le g(-1) \le M - b - a \tag{3}$$
$$0 \le g(2) \le M + 2^\beta b + 2^\alpha a \tag{4}$$
$$0 \le g(-2) \le M - 2^\beta b - 2^\alpha a \tag{5}$$

Adjuk hozzá (2) $2^\alpha$-szorosához (5)-öt: $0 \le (2^\alpha + 1)M + (2^\alpha - 2^\beta)b$, azaz

$$(2^\beta - 2^\alpha)b \le (2^\alpha + 1)M. \tag{6}$$

Hasonlóképpen (3) $2^\alpha$-szorosához hozzáadva (4)-et: $0 \le (2^\alpha + 1)M + (2^\beta - 2^\alpha)b$, azaz

$$-(2^\beta - 2^\alpha)b \le (2^\alpha + 1)M. \tag{7}$$

A (6) és (7) egyenlőtlenségeket összefoglalva:

$$(2^\alpha + 1)M \geq \left|(2^\beta - 2^\alpha)b\right| = \left|2^\beta - 2^\alpha\right| \cdot |b|.$$

Mivel $\alpha$ és $\beta$ különböző, $2^\alpha$ és $2^\beta$ két különböző páros szám, ezért $\left|2^\beta - 2^\alpha\right| \geq 2$; ebből pedig

$$|b| \leq \frac{\left|2^\beta - 2^\alpha\right|}{2}|b| \leq \frac{(2^\alpha + 1)M}{2}.$$

Ha tehát $|b|$-t $\dfrac{(2^\alpha + 1)M}{2}$-nél nagyobbnak választja $B$, akkor nyer.

Láttuk, hogy a győztes személye csak attól függ, hogy az utoljára beírt tag kitevője páros, vagy páratlan. Ha páros, akkor $A$ nyer. Ha páratlan. akkor $B$ az előző lépésben tud olyat lépni, amivel megnyeri a játékot.

Ha $B$ mindig a páros kitevőjű helyekre ír be együtthatókat (amíg vannak ilyenek), akkor legkésőbb a nyolcadik lépésben elfogynak a páros kitevők, így az utolsó kitevő páratlan lesz.

A játékban tehát $B$-nek, a második játékosnak van nyerő stratégiája.

*Megjegyzés.* Ahhoz, hogy a feladat eredeti kérdésére választ adhassunk, nincs szükségünk a bizonyítás első részére, a páros $\alpha$ esetének vizsgálatára. Az ott kapott eredmény viszont azt mutatju, hogy $B$-nek lényegében *egyetlen* nyerő stratégiája van: a páros kitevőjű tagok elfogyasztása.