Elegendő az

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3$$

feltételt is kielégítő sorozatokkal foglalkozni. Ugyanis egy tetszőleges, a feladatban szerpelő sorozat első három tagját csökkenő sorba rendezve, a sorozat többi eleme nem változik, s mivel az új sorozat a feladatban szereplő összes feltételt teljesíti, így ha a módosított sorozat 21. eleme 0, akkor az eredetié is. Mindezeket a következő lépésekben igazolhatjuk:

Ha $x_1 < x_2$, akkor legyen

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = x_1, \quad x_3' = |x_1' - x_2'|, \quad \dots$$

Világos, hogy $x_1', x_2' \leq 10000$, valamint $x_j' = x_i$, ha $j \geq 3$. Feltehető tehát, hogy $x_1 \geq x_2$.

Ha $x_2 < x_3$, akkor tekintsük az

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = x_2, \quad x_4' = \min(|x_1' - x_2'|, |x_1' - x_3'|, |x_2' - x_3'|), \quad \dots$$

sorozatot. Itt $x_3' = x_2 = x_1 - (x_1 - x_2) = x_1' - x_3'$, továbbá $x_j' = x_j$, ha $j \geq 4$, hiszen x_j értékét az első három elem egymás közti permutálása nem befolyásolja. S mivel $x_1' = x_1 \leq 10000$, $x_2' = x_3 \leq x_1 \leq 10000$, így valóban feltehetjük, hogy sorozatunkra

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3$$

teljesül.

Látható, hogy $x_i \leq x_{i+1}$, ha $i = 1, 2, \dots$: az $i = 1, 2$ esetben ez feltevésünkből következik, a későbbiekben pedig

$$\begin{aligned} x_{i+1} = \min(&|x_1 - x_2|, \dots, |x_1 - x_{i-1}|, |x_2 - x_3|, \dots \\ &\dots, |x_2 - x_{i-1}|, \dots, |x_{i-2} - x_{i-1}|, |x_1 - x_i|, \dots, |x_{i-1} - x_i|) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \min(\min(&|x_1 - x_2|, \dots, |x_1 - x_{i-1}|, \dots, |x_{i-2} - x_{i-1}|), \\ &\min(|x_1 - x_i|, \dots, |x_{i-1} - x_i|)) = \end{aligned}$$

$$= \min(x_i, K_i) \leq x_i, \qquad \text{ahol} \quad K_i = \min(|x_1 - x_i|, \dots, |x_{i-1} - x_i|).$$

Így

$$x_{i+2} = \min(x_1 - x_2, \dots, x_i - x_{i+1}, \dots) \leq x_i - x_{i+1},$$

azaz

$$x_i \geq x_{i+1} + x_{i+2}, \qquad i = 1, 2, \dots$$

Tegyük most föl indirekt módon, hogy $x_{21} \neq 0$. Minthogy x_i nyilvánvalóan nemnegatív egész, így szükségképpen $x_{21} \geq 1$. Ekkor viszont

$$\begin{aligned} &x_{20} \geq x_{21} \geq 1 \qquad \text{és ezután} \\ &x_{19} \geq x_{20} + x_{21} \geq 2, \\ &x_{18} \geq x_{19} + x_{20} \geq 3, \end{aligned}$$

majd a továbbiakban $x_{17} \geq 5$, $x_{16} \geq 8$, $x_{15} \geq 13$, $x_{14} \geq 21$, $x_{13} \geq 34$, $x_{12} \geq 55$, $x_{11} \geq 89$, $x_{10} \geq 144$, $x_9 \geq 233$, $x_8 \geq 377$, $x_7 \geq 610$, $x_6 \geq 987$, $x_5 \geq 1597$, $x_4 \geq 2584$, $x_3 \geq 4181$, $x_2 \geq 6765$, $x_1 \geq 10946 > 10000$, ami ellentmond az

$$x_1 \leq 10000$$

feltevésnek. Az $x_{21} = 0$ állítást ezzel igazoltuk.

Burcsi Péter (Pápa, Türr I. Gimn., II. o. t.)
Elek Péter (Budapest, Árpád Gimn., II. o. t.) és
Szádeczky-Kardoss Szabolcs (Fazekas M. Főv. Gy. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Az x_i-kre vonatkozó alsó becsléseinket a

$$b_0 = b_1 = 1, \quad b_2 = b_0 + b_1 = 2, \quad \dots \quad, b_j = b_{j-1} + b_{j-2}$$

sorozat adta, amelyet Fibonacci-féle sorozatnak neveznek.