

*Rendesen* (vagyis nem maradéknak) a  $(2k-1)$ -edik osztási lépésben  $2k-1$  tallért kap az első, illetve a  $2k$ -adikban  $2k$ -t a második rabló.

Jelölje  $n$  a zsákban lévő tallérok számát.

Ha rendesen (nem maradék) jut a másodiknak, de már nem jut az elsőnek, akkor a második például  $2+4+6+\dots+(2k-2) = (k^2-k)$ -t kapott, míg az első  $1+3+5+\dots+(2k-3)+r = (k-1)^2+r$ -et, ahol  $0 \leq r < 2k-1$ . Kaphatott kevesebbet, többet, sőt ugyanannyit is, mint a második:

$$\begin{aligned} (k-1)^2+r < k^2-k, & \quad \text{ha } 0 \leq r < k-1; & \quad \text{ekkor} & \quad 2k^2-3k+1 \leq n < 2k^2-2k; \\ (k-1)^2+r = k^2-k, & \quad \text{ha } r = k-1; & & \quad n = 2k^2-2k = 2k(k-1); \\ (k-1)^2+r > k^2-k, & \quad \text{ha } k-1 < r < 2k-1; & & \quad 2k^2-2k < n < 2k^2-k. \end{aligned}$$

Ha viszont rendesen jut az elsőnek, de már nem jut a másíknak, akkor az első például  $1+3+\dots+(2k-1) = k^2$ -et kapott, míg a második  $2+4+6+\dots+(2k-2)+r = k^2-k+r$ -et, ahol  $0 \leq r < 2k$ . Ő is kaphatott kevesebbet, többet vagy ugyanannyit, mint az első:

$$\begin{aligned} k^2 > k^2-k+r & \quad \text{ha } 0 \leq r < k; & \quad \text{itt} & \quad 2k^2-k \leq n < 2k^2; \\ k^2 = k^2-k+r & \quad \text{ha } r = k; & & \quad n = 2k^2; \\ k^2 < k^2-k+r & \quad \text{ha } k < r < 2k; & & \quad 2k^2 < n < 2k^2+k. \end{aligned}$$

Másképpen nem is kaphattak volna ugyanannyi aranyat, hiszen valamelyik mindig *rendesen* kap.

Ezért tehát akkor *igazságos az osztzkodás*, ha az  $n$  valamely  $k$ -ra  $2(k-1)k$  vagy  $2k^2$ -tel egyenlő. (A „következő”  $n$  pl.  $2k(k+1) = 2k^2+2k$ .)

A fentiek szerint az első rabló két esetben járhat jól: ha  $2k^2-2k < n < 2k^2-k$ , illetve ha  $2k^2-k \leq n < 2k^2$ , rövideiden tehát ha  $2k^2-2k = 2 \cdot (k-1) \cdot k < n < 2 \cdot k^2$  tallér volt a zsákban.

Minden más (nem igazságos) osztzkodás esetén a másik rabló jár jól: tehát, ha  $2k^2 < n < 2k^2+2k$  tallér volt a zsákban.

*Megjegyzés.*  $2k^2-2k = \left\lfloor \frac{(2k-1)^2}{2} \right\rfloor$  és  $2k^2 = \left\lfloor \frac{(2k)^2}{2} \right\rfloor$  miatt azt mondhatjuk, hogy ha  $n$  egy négyzetszám felének egészrésze, akkor *igazságos* az osztzkodás, míg ha  $n$  egy páratlan és egy páros négyzetszám felének egészrésze közé esik, akkor az első, fordított esetben a második rabló jár jól.