Jelöljük a háromszög oldalának hosszát a-val. Megmutatjuk, hogy a feladatban szereplő tört számlálója is és nevezője is csak a-tól függ.

A háromszög területét kétféleképpen felírva (*1. ábra*)

$$t_{ABC} = t_{APB} + t_{BPC} + t_{CPA},$$

azaz

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a \cdot PF}{2} + \frac{a \cdot PD}{2} + \frac{a \cdot PE}{2}.$$

Ebből a tört számlálójára $PD + PE + PF = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ adódik.

Húzzunk P-n át párhuzamosokat az ABC háromszög oldalaival, s jelöljük ezeknek az egyeneseknek a háromszög oldalával való metszéspontjait a *2. ábrán* látható módon. Az $ABKL$, $BCGH$ és $CAJI$ négyszögek szimmetrikus trapézok,ezért $AL = BK$, $BH = CG$ és $AJ = CI$. A PJH, PKI, és PGL háromszögek minden szöge 60°, ezért ezek szabályos háromszögek, amelyekben PF, PD és PE oldalfelező merőlegesek. Ezek alapján az ABC háromszög kerületét a következő alakban írhatjuk:

$$\begin{aligned} 3a &= (AJ + JF + FH + HB) + (BK + KD + DI + IC) + (CG + GE + EL + LA) = \\ &= [(AJ + JF) + (IC + FH)] + [(BK + KD) + (AL + DI)] + [(CG + GE) + (HB + EL)] = \\ &= 2(AF + BD + CE). \end{aligned}$$

Vagyis $AF + BD + CE = \dfrac{3a}{2}$.

Tehát a keresett tört értéke:

$$\frac{PD + PE + PF}{BD + CE + AF} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{3a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Csordás Péter (Kecskemét, Zrínyi I. Ált. Isk., 8. o. t.)