

Pozitív számokról van szó, tehát vonhatunk n -edik gyököt:

$$\sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)} \geq n + 1.$$

A bal oldalon az $(1 + 1/a_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) számok mértani közepe áll, ami nagyobb vagy egyenlő, mint a harmonikus közepük:

$$\sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)} \geq \frac{n}{\frac{1}{1+1/a_1} + \frac{1}{1+1/a_2} + \dots + \frac{1}{1+1/a_n}}.$$

Alakítsuk át az egyenlőtlenség jobb oldalát:

$$\begin{aligned} \frac{n}{\frac{1}{1+1/a_1} + \frac{1}{1+1/a_2} + \dots + \frac{1}{1+1/a_n}} &= \frac{n}{\frac{a_1}{1+a_1} + \frac{a_2}{1+a_2} + \dots + \frac{a_n}{1+a_n}} = \\ &= \frac{n}{\frac{a_1+1}{1+a_1} + \frac{a_2+1}{1+a_2} + \dots + \frac{a_n+1}{1+a_n} - \left(\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_n}\right)} = \frac{n}{n - \left(\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_n}\right)}. \end{aligned}$$

Az $\left(\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_n}\right)$ összeg becslhető a számtani és harmonikus közepek közti egyenlőtlenséggel:

$$\frac{n}{\frac{1}{1+1/a_1} + \frac{1}{1+1/a_2} + \dots + \frac{1}{1+1/a_n}} \leq \frac{a_1 + 1 + a_2 + 1 + \dots + a_n + 1}{n} = \frac{n+1}{n}$$

(Itt felhasználtuk, hogy $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$.) Vagyis:

$$\left(\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_n}\right) \geq \frac{n^2}{n+1}.$$

Ezt behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)} &\geq \frac{n}{n - \left(\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_n}\right)} \geq \\ &\geq \frac{n}{n - \frac{n^2}{n+1}} = \frac{n}{\frac{n^2+n-n^2}{n+1}} = \frac{n}{\frac{n}{n+1}} = n + 1. \end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk az egyenlőtlenséget.