

Mivel  $x$  és  $y$  pozitív számok, azért  $x^3 + y^3$  is pozitív, így szükségképpen  $x > y$ . Nyilvánvaló, hogy  $x^3 + y^3 > x^3 - y^3$ ; a jobb oldalt szorzattá alakítva, a bal oldalon pedig a feltételt alkalmazva:

$$x - y > (x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

Az  $x - y$  pozitív, ezért leosztáskor az egyenlőtlenség iránya nem változik:

$$1 > x^2 + xy + y^2,$$

s minthogy  $x > 0$ ,  $y > 0$ , így  $xy > 0$ , tehát

$$1 > x^2 + y^2,$$

ami a bizonyítandó állítás.

*Homoki István* (Nyíregyháza, Krúdy Gy. Gimn., II. o. t.) dolgozata alapján

*Megjegyzés.* Az állítás nem élesíthető, azaz tetszőleges  $\varepsilon > 0$  esetén megadható olyan  $x, z > 0$ , hogy (az eredeti feltételek teljesülése mellett)

$$1 - \varepsilon < x^2 + y^2 < 1.$$

Például az  $x = \sqrt{1 - \varepsilon}$  választás ( $\varepsilon < 1$ ) megfelelő. Az egyenletet rendezve

$$y^3 + y = -x^3 + x = \sqrt{1 - \varepsilon}(1 - 1 + \varepsilon) = \varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon}.$$

Az egyenletben  $y = 0$  esetén

$$y^3 + y = 0 < \varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon},$$

viszont  $y = \sqrt{\varepsilon}$  esetén

$$y^3 + y = \sqrt{\varepsilon}(1 + \varepsilon) > \sqrt{\varepsilon + \varepsilon^3} > \sqrt{\varepsilon^2} > \sqrt{\varepsilon^2 - \varepsilon^3} = \varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon},$$

azaz létezik a feltételeknek eleget tevő  $y$  a  $(0; \sqrt{\varepsilon})$  intervallumban, s ekkor

$$1 > x^2 + y^2 > 1 - \varepsilon.$$