Egy racionális szám tizedestört alakjáról tudjuk, hogy periódikus, azaz valahonnan (nem feltétlenül az elejétől) kezdve egy (esetleg csupa nullából álló) számjegysorozat ismétlődéséből áll. Az f-re vonatkozó pozitivitási feltétel miatt itt nem lehetséges, hogy a tört csupa nullára végződjék. Így a megoldáshoz elég azt megmutatni, hogy tetszőlegesen hosszú, egymás utáni nullákból álló sorozat van benne, hiszen ekkor az ismétlődő sorozat csak azonosan nulla lehetne, amit viszont épp az előbb zártunk ki.

Bizonyításunk a következő észrevételen alapul: ha feltételeink teljesülnek, akkor csak véges sok olyan x pozitív szám létezik, amelyre $f(x) \leq f(1)$ igaz.

Ellenkező esetben ugyanis az $f(x)$ polinom végtelen sokszor venne fel 1 és $f(1)$ közti egész értéket, ami azt jelentené, hogy valamelyik $1 \leq \alpha \leq f(1)$ egész értéket magát is végtelen sokszor venné föl. Azaz az $f(x) - \alpha = 0$ egyenletnek végtelen sok megoldása lenne, tehát $f(x) - \alpha$ azonosan nulla volna; ám ez ellentmond annak, hogy f legalább elsőfokú. Észrevételünkből következik, hogy létezik olyan N_0 érték, hogy ha x egész és $x \geq N_0$, akkor $f(x) > f(1)$. Válasszuk a d egész számot úgy, hogy $10^d \geq N_0$ teljesüljön.

Legyen $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$; s írjunk x helyébe $(x-1)+1$-et, bontsuk föl a zárójeleket, majd rendezzük $(x-1)$ hatványai szerint:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + \dots + a_0 = a_n(x-1+1)^n + \dots + a_0 = \\ &= a_n\left((x-1)^n + n(x-1)^{n-1} + \dots + 1\right) + a_{n-1}\left((x-1)^{n-1} + \dots\right) + \dots + a_0 = \\ &= b_n(x-1)^n + \dots + b_1(x-1) + b_0. \end{aligned}$$

Látható, hogy $f(1) = b_0 > 0$. Válasszuk c-t úgy, hogy $10^c > b_0$, legyen továbbá $m \geq d$ szintén egész. Ekkor

$$f(10^{m+c}+1) = b_n \cdot 10^{(m+c)n} + \dots + b_1 \cdot 10^{m+c} + f(1).$$

Mivel $10^{m+c} + 1 \geq 10^d \geq N_0$, azért $f(10^{m+c}+1) > f(1)$, azaz

$$0 < b_n 10^{(m+c)n} + \dots + b_1 \cdot 10^{m+c} = 10^{m+c}\left(b_n \cdot 10^{(m+c)n-1} + \dots + b_1\right).$$

A zárójelben álló összeget B-vel jelölve tehát

$$f(10^{m+c}+1) = 10^{m+c} \cdot B + f(1),$$

s itt $f(1) < 10^c$, ezért a tízes számrendszerben felírva $f(10^{m+c}+1)$ a következő alakú:

$$B\ \underbrace{00\dots0}_{\substack{\text{legalább } m \\ \text{darab nulla}}}\ \underbrace{\dots f(1)}_{\substack{\text{legfeljebb} \\ c \text{ jegy}}},$$

vagyis tartalmaz legalább m darab egymás utáni nullát. Mivel az m tetszőlegesen nagy lehet, így az y szám tizedes tört alakja nem periódikus, tehát szükségképpen irracionális.

Valkó Benedek (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján