I. megoldás. Tükrözzük a BCD háromszöget BD felezőmerőlegesére. A tükrözésnél B és D felcserélődik, C képe pedig egy C'-vel jelölt pont lesz *(1. ábra)*. A tükrözés miatt $CD = C'B$, $CB = C'D$ és $T_{ABCD} = T_{ABC'D}$, továbbá

$$ADC'\sphericalangle = ADB\sphericalangle + BDC'\sphericalangle = ADB\sphericalangle + DBC\sphericalangle = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ \quad \text{és}$$
$$ABC'\sphericalangle = ABD\sphericalangle + DBC'\sphericalangle = ABD\sphericalangle + BDC\sphericalangle = 20^\circ + 70^\circ = 90^\circ.$$

Tehát az ABC' és az ADC' háromszögek derékszögűek, így

$$T_{ABC'} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC' = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD \text{ és } T_{ADC'} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC' = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot CB.$$

Vagyis

$$T_{ABCD} = T_{ABC'D} = T_{ABC'} + T_{ADC'} = \frac{1}{2}(AB \cdot CD + AD \cdot DB).$$

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

II. megoldás. Az $ABCD$ négyszög húrnégyszög, mert $ABC\sphericalangle + ADC\sphericalangle = ABD\sphericalangle + DBC\sphericalangle + ADB\sphericalangle + BDC\sphericalangle = 20^\circ + 60^\circ + 30^\circ + 70^\circ = 180^\circ$ *(2. ábra)*. $CAD\sphericalangle = CBD\sphericalangle = 60^\circ$, mert ugyanakkora ívhez tartozó kerületi szögek. Ekkor viszont $CAD\sphericalangle + ADB\sphericalangle = 60^\circ + 60^\circ = 90^\circ$, vagyis a négyszög átlói egymásra merőlegesek, ezért a négyszög területe az átlók szorzatának a fele: $T_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$.

Ptolemaiosz tétele szerint (megtalálható pl. a *Geometriai feladatok gyüjteménye I.* kötetének 1259. feladatában) egy húrnégyszög átlóinak szorzata megegyezik a szemközti oldalak szorzatának összegével, vagyis

$$T_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB \cdot CD + AD \cdot BC).$$

Ez pedig éppen a bizonyítandó állítás.

Hegedűs Márton (Fazekas. M. Főv. Gyak. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. Mindkét megoldás során kihasználtuk, hogy az $ABCD$ *négyszög konvex.* Bár a feladat szövegében ez kimondva nem szerepelt, a fogalmazásból úgy lehetett érteni, („az $ABCD$ négyszög*ben* az $ABD\sphericalangle$" stb. szögekről, tehát a *négyszög belsejében* lévő szögekről szól a feladat). Ha a konvexitást nem tesszük fel, akkor az állítás nem igaz, pl. a *3. ábrán* lévő A, B, C, D pontok esetén (ezt az ábrát úgy kaptuk, hogy az *1. ábra* A pontját tükröztük a BD egyenesre) mind a négy szög a kívánt nagyságú, az $ABCD$ négyszög területe viszont nyilván kisebb, mint $\frac{1}{2}(AB \cdot CD + AD \cdot BC)$.