

A feladatot a következő állítás segítségével fogjuk megoldani:

*Ha egy iskolában a három nyelv mindegyikét pontosan  $2n$ -en beszélik, akkor kiválasztható közülük néhány tanuló úgy, hogy közülük pontosan 2 beszélje az egyes nyelveket.*

Ez valóban elegendő, hiszen ezt az állítást alkalmazva  $2n = 50$ -nel, majd a megmaradtakra  $2n = 48$ -cal és így tovább, majd a létrejött 25 csoportot ötösével összefogva, a kívánt tulajdonságú csoportokat kapjuk. Mivel azok, akik egyik nyelvet sem beszélik, bárhová beoszthatók, azért feltehető, hogy ilyenek nincsenek is.

Jelölje a csak angolul tudók halmazát  $a$ , számát  $N_a$ ; hasonlóan értelmezzük az  $f, n, an, af, fn, afn$  halmazokat és az  $N_f, N_n, N_{af}, N_{fn}, N_{afn}$  számokat. A szétosztást a következő esetekre lebontva végezzük:

1.  $N_{af} \neq 0, N_{an} \neq 0, N_{fn} \neq 0$ . Ekkor egy  $af$ -beli, egy  $an$ -beli és egy  $fn$ -beli gyerek megfelel.
2.  $N_{af} = 0, N_{an} \neq 0, N_{fn} \neq 0$ . Ekkor látható, hogy  $N_{afn} + N_{an} + N_a$  gyerek tud angolul, míg németül  $N_n + N_{fn} + N_{an} + N_{afn}$ , azaz  $N_{afn} + N_{an} + N_a = N_n + N_{afn} + N_{an} + N_{fn} > N_n + N_{afn} + N_{an} \leq N_{afn} + N_{an}$ , amiből  $N_a \leq 1$ . Hasonlóan  $N_f \leq 1$ , így egy  $an$ -beli, egy  $fn$ -beli, egy  $a$ -beli és egy  $f$ -beli megfelel.
3.  $N_{fn} \neq 0, N_{afn} \neq 0, N_{an} = N_{af} = 0$ . Ekkor angolul  $N_a + N_{afn}$  gyerek beszél, németül pedig  $N_{fn} + N_{afn} + N_n$ , vagyis  $N_a + N_{afn} = N_n + N_{afn} + N_{fn} > N_{afn}$ , azaz  $N_a \geq 1$ . Ekkor egy  $a$ -beli, egy  $fn$ -beli lesz jó.
4.  $N_{fn} \neq 0, N_{afn} = N_{an} = N_{af} = 0$ .
  - a)  $N_{fn} \geq 2$ . Ilyenkor angolul  $N_a$  gyerek tud, azaz  $N_a = 2n \geq 2$ , s így két  $a$ -beli és két  $fn$ -beli megfelel.
  - b)  $N_{fn} = 1$ . Ekkor szintén  $N_a \geq 2$ , valamint a németül tudók számára  $2n = N_{fn} + N_n = 1 + N_n$ , amiből  $N_n > 1$ , választhatunk tehát két  $a$ -belit, egy-egy  $n$ -,  $f$  és  $fn$ -belit.
5.  $N_{an} = N_{af} = N_{fn} = 0$ .
  - a)  $N_{afn} \geq 2$ . Ekkor válasszunk két  $afn$ -belit.
  - b)  $N_{afn} = 1$ . A 4.b) esethez hasonlóan látható, hogy ekkor  $N_a \geq 1, N_n \geq 1, N_f \geq 1$ , azaz választhatunk egy-egy  $afn$ -,  $a$ -, és  $f$ -belit.
  - c)  $N_{afn} = 0$ . Ekkor  $N_a = 2n \geq 2, N_f \geq 2, N_n \geq 2$ ; vegyünk e három halmazból 2-2 gyereket.

Mivel az egyes nyelvek szerepe felcserélhető, azért az összes esetet felsoroltuk: ha az  $N_{af}, N_{fn}, N_{an}$  egyike sem 0; egyikük 0; kettő 0 és  $N_{afn} \neq 0$ ; valamint ha mindhárom 0. Ezzel beláttuk segédállításunkat, s az elején mondottak szerint a feladatot is megoldottuk.

