Ha egy n szám prímtényezős felbontása $p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\dots\cdot p_n^{\alpha_n}$, akkor osztóinak a száma $(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot\dots\cdot(\alpha_n+1)$; egy osztó ugyanis $p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot\dots\cdot p_n^{\beta_n}$ alakú, ahol $0\le\beta_i\le\alpha_i$, vagyis p_1 kitevője éppen (α_1+1)-féle lehet, p_2-é (α_2+1)-féle és így tovább. Ezt felhasználva először meghatározzuk, hogy legfeljebb hány osztója lehet egy kétjegyű számnak.

Mivel $2\cdot3\cdot5\cdot7>100$, azért egy kétjegyű számnak 1-, 2- vagy 3-féle prímosztója lehet. Az előbbiek szerint $p^a\cdot q^b\cdot r^c\cdot$ és $2^a\cdot3^b\cdot5^c$ osztóinak száma megegyezik, s az utóbbi, feltéve, hogy $p<q<r$, nem nagyobb az előbbinél; vagyis a keresett maximum biztos, hogy a $2^a\cdot3^b\cdot5^c$ alakú kétjegyű számok között is fellép. Vizsgáljuk ezeket!

Ha egy ilyen alakú számnál fellép a maximum, akkor $2^{(a+1)}\cdot3^b\cdot5^c$, minthogy az előbbinél több osztója van, szükségképpen már háromjegyű. Elegendő tehát azokat a számokat tekinteni, amelyekben a 2 kitevője az adott b és c mellett a lehető legnagyobb.

Minthogy $5^3\ge100$, így szükségképpen $c\le2$. Ha $c=2$, akkor $2^a\cdot3^b<4$, azaz a $2^a\cdot3^b\cdot5^c$ alakú kétjegyű számok közül a $2\cdot5^2$ és a $3\cdot5^2$ rendelkezik a legtöbb osztóval, mégpedig 6-tal.

Ha $c=1$, akkor $2^a\cdot3^b\le19$, vagyis az itteni maximum lehetőségek:

$$\begin{aligned}
b=2 &\quad\to\quad 2\cdot3^2\cdot5,\ \text{hiszen } 2^2\cdot3^2\cdot5\ge100;\ \text{osztói száma } 12\\
b=1 &\quad\to\quad 2^2\cdot3\cdot5,\ \text{osztói száma } 12\\
b=0 &\quad\to\quad 2^4\cdot5,\ \text{osztói száma } 10.
\end{aligned}$$

Ha pedig $c=0$, akkor $b\le4$, a lehetőségek tehát (zárójelben az osztók száma):

$$\begin{aligned}
b=4 &\quad\to\quad 3^4,(5)\\
b=3 &\quad\to\quad 2\cdot3^3,(8)\\
b=2 &\quad\to\quad 2^3\cdot3^2,(12)\\
b=1 &\quad\to\quad 2^5\cdot3,(12)\\
b=0 &\quad\to\quad 2^6,(7)
\end{aligned}$$

Megállapítottuk, hogy egy kétjegyű számnak legfeljebb 12 osztója lehet, s rögtön látjuk, hogy a $2\cdot3^2\cdot5=90$, $2^2\cdot3\cdot5=60$, $2^3\cdot3^2=72$, $2^5\cdot3=96$, számoknak éppen ennyi osztója van. Keressük meg a többi ilyen számot.

Nézzük először a 3-féle prímosztóval rendelkezőket. Ezek $p^a\cdot q^b\cdot r^c$ alakúak, ahol $a\ge b\ge c\ge1$ és $(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1)=12$, ami csak úgy lehet, ha $a=2$, $b=c=1$. Tehát a keresett számok p^2qr alakúak. Mivel p, q, r különböző prímek, azért a legkisebb közülük legalább 2, a középső legalább 3, a legnagyobb legalább 5, azaz $p^2qr\ge p\cdot2\cdot3\cdot5=30p$. Ez viszont $p^2qr\le99$ miatt csak úgy lehet, ha $p=2$ vagy 3. A $p=3$ esetben $3^2qr\le99$, amiből $qr\le11$, ez csak $q=2$, $r=5$ (vagy fordítva) mellett lehetséges. A $p=2$ esetben $qr=24$. Feltehető, hogy $q<r$, ekkor $r\ge5$ s így $q<5$, vagyis $q=3$. Emellett $r=5$ vagy 7 állhat. Kaptuk tehát a $3^2\cdot2\cdot5$, $2^2\cdot3\cdot5$ és a $2^2\cdot3\cdot7$ eseteket.

Nézzük most a p^aq^b alakúakat, ahol $a\ge b\ge1$. Az előzőekhöz hasonló megfontolással látható, hogy akkor $a=3$, $b=2$ vagy $a=5$, $b=1$ léphet csak föl. Az $a=5$ esetben szükségképpen $p=2$, így $q\le\frac{99}{32}$, azaz $q=3$. Az $a=3$ esetben $p^2q^2\ge2^2\cdot3^2=36$, vagyis $99\le p^3q^2\ge36p$, amiből $p\le2,75$, azaz $p=2$; valamint $q\le\sqrt{\frac{99}{8}}$, ami $q=3$ esetén teljesülhet. Tehát a $2^5\cdot3$ és a $2^3\cdot3^2$ eseteket kaptuk.

A p^n alakú számok esetén, ha az osztók száma 12, akkor $a=11$. Ez azonban $p^{11}\ge2^{11}>99$ miatt nem lehetséges. Összefoglalva, a keresett számok a következők:

$$2\cdot3^2\cdot5=90,\quad 2^2\cdot3\cdot5=60,\quad 2^2\cdot3\cdot7=84,\quad 2^5\cdot3=96,\quad 2^3\cdot3^2=72.$$

Megjegyzés. Igen sok beküldő megelégedett az általunk is eredményül kapott számok (vagy ezek némelyikének) felsorolásával, minden további magyarázat, indoklás nélkül (miért ennyi a maximum; van-e még más szám, amelynek szintén ennyi osztója van). Ezek a dolgozatok — a pontversenyre érvényes „az eredmények puszta közlése nem elegendő a megoldáshoz” elvnek megfelelően — az elérhető maximális pontszámnak csak egy részét kapták meg.