I. megoldás. A Heron-féle területképlet szerint

$$T^2 = \frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c). \tag{1}$$

Most tekintsük a következő egyenlőtlenségeket:

$$\begin{aligned}(a-b+c)(a+b-c) &= a^2-(b-c)^2 \le a^2,\\ (-a+b+c)(a+b-c) &= b^2-(a-c)^2 \le b^2,\\ (-a+b+c)(a-b+c) &= c^2-(a-b)^2 \le c^2.\end{aligned} \tag{2}$$

Ezeket összeszorozva kapjuk, hogy

$$(a+b-c)^2(a-b+c)^2(-a+b+c)^2 \le a^2b^2c^2,$$

tehát

$$(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \le abc,$$

ebből az (1) felhasználásával éppen a bizonyítandó adódik.

A feladatban pontosan akkor áll fenn egyenlőség, amikor a (2)-ben egyenlőségek állnak, tehát ha $a=b=c$, vagyis a háromszög szabályos.

II. megoldás. Jelöljük a háromszög körülírt és beírt körének a sugarát R-rel, illetve r-rel. Ismert, hogy $abc = 4RT$ és $a+b+c = 2s = \dfrac{2T}{r}$.

Ezek felhasználásával a jobb oldal így alakul:

$$\frac{abc(a+b+c)}{16} = \frac{4RT\cdot\frac{2T}{r}}{16} = \frac{1}{2}T^2\cdot\frac{R}{r}.$$

Tehát a feladat az

$$\frac{1}{2}T^2\cdot\frac{R}{r} \ge T^2,$$

azaz az $R \ge 2r$ egyenlőtlenséggel ekvivalens, ami sugáregyenlőtlenség néven ismert. (Bizonyítása megtalálható *Reiman István:* Geometria és határterületei c. könyv 227. oldalán.)

Németh Zoltán (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn. II. o. t.) dolgozata alapján