Vizsgáljuk általánosabban a kérdést: hány egész megoldása van az

$$x^2 - y^2 = k$$

egyenletnek, ha $k = \pm p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$, ahol $p_1, p_2 \ldots, p_m$ egymástól különböző prímek. (A $k = 0$ eset láthatóan érdektelen. A $k = \pm 1$ esetekben a megoldások: $x = \pm 1$, $y = 0$, ill. $x = 0$, $y = \pm 1$.)

Az egyenlet bal oldalát szorzattá alakítva

$$(x - y)(x + y) = k$$

adódik, amiből látszik, hogy a keresendő megoldásokra

$$(x + y)|k, \qquad (x - y)|k$$

teljesül. A k számnak $2 \cdot (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_m + 1)$ egész osztója van (ugyanis egy tetszőleges d osztó $\pm p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{\beta_m}$ alakú, ahol $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$; azaz a β_i kitevő $(\alpha_i + 1)-$ féleképpen választható, az előjel pedig kétféleképpen), vagyis az $x + y$ legfeljebb ennyiféle értéket vehet fel. Az $x + y$ értéke viszont már meghatározza $x - y$ értékét; legyenek ezek rendre d és k/d, ahonnan

$$x = \frac{d + k/d}{2}, \quad y = \frac{d - k/d}{2}.$$

Amennyiben ezek egész számok, úgy az eredeti egyenlet megoldásaihoz jutottunk. A továbbiakban három esetet kell megkülönböztetni.

1. eset. k páratlan. Ekkor, az előbbi jelöléseket használva,$2 \nmid d$, $2 \nmid \frac{k}{d}$, s így mind $\frac{d + k/d}{2}$, mind $\frac{d - k/d}{2}$ is egész szám. Minden d osztóhoz találtunk tehát egy (x, y) számpárt, különböző osztókhoz nyilván különbözőt, és ez az összes megoldás. Tehát ebben az esetben a megoldások száma:

$$2(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_m + 1).$$

2. eset. k páros, de $4 \nmid k$. Ekkor a d és k/d számok közül pontosan az egyik lesz páros, a másik páratlan, vagyis $\frac{d + k/d}{2}$ nem egész szám. Így ebben az esetben nincs egész megoldás.

3. eset. $4|k$. Ilyenkor d és k/d egyike biztosan páros, így ahhoz hogy x és y egész legyen, a másik számnak is párosnak kell lennie. Azok a d osztók szolgáltatnak tehát megoldást, amelyekre $2|d$ és $2|\frac{k}{d}$ is fennáll. Egy ilyen d prímtényezős alakjában a $p_1 = 2$ kitevőjét β_1 -gyel jelölve,

$$1 \leq \beta_1 \leq \alpha_1 - 1$$

teljesül. (A feltétel értelmes, hiszen a $4|k$ feltevés miatt $\alpha_1 \geq 2$.) Ilyen β_1 -ből $\alpha_1 - 1$ darab van, s mivel a többi prímtényező valamint az előjel már – az előbbi határokon belül – tetszőleges lehet, az ilyen osztók s egyben a megoldások száma

$$2(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_m + 1).$$

Nézzük meg végezetül, hogy az eredeti feladat számai mely esetekhez tartoznak. Az $n^2 = 1992^2 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 83^2$ a 3. esetre példa, a megoldások száma tehát $2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 = 90$; az $n^2 = 1993^2$ az első esetbe tartozik $2 \cdot 3 = 6$ megoldással; míg az $n^2 = 1994^2 = 2^2 \cdot 997^2$ szintén a 3. eset szerint $2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$ megoldást ad.

Tóth Gábor Zsolt (Budapest, Árpád Gimn. I. o. t.)