Jelöljük a háromszög súlypontját S -sel. A súlyvonalak harmadolva metszik egymást, tehát

$$AS=\frac{2}{3}s_a, \qquad BS=\frac{2}{3}s_b, \qquad CS=\frac{2}{3}s_c.$$

1993-12-512-1.eps

1. ábra

Az ASB, BSC, CSA háromszögekben a háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$\frac{2}{3}s_a+\frac{2}{3}s_b>c, \qquad \frac{2}{3}s_b+\frac{2}{3}s_c>a, \qquad \frac{2}{3}s_c+\frac{2}{3}s_a>b.$$

Ezeket összeadva

$$\frac{4}{3}(s_a+s_b+s_c)>a+b+c=2s.$$

Innen

$$s_a+s_b+s_c>1,5s.$$

Hátra van még a másik egyenlőtlenség igazolása.

1993-12-512-2.eps

2. ábra

Tükrözzük a háromszöget a BC oldal felezőpontjára, az A pont tükörképe legyen A'. Ekkor

$$BA'=b \qquad \text{és} \qquad AA'=2s_a.$$

Ismét a háromszög-egyenlőtlenséget írjuk fel, ezúttal az ABA' háromszögben:

$$2s_a<b+c.$$

Ugyanígy kapjuk, hogy

$$2s_b<a+c,$$
$$2s_c<a+b.$$

Ha ezeket az egyenlőtlenségeket összeadjuk és 2-vel elosztjuk, éppen a bizonyítandó $s_a+s_b+s_c<2s$ egyenlőtlenséget kapjuk.