

A feladat második részét nyilván igazoltuk, ha megmutatjuk, hogy minden törpe legfeljebb egyszer volt beteg, hiszen ekkor a járvány legfeljebb annyi napig tarthatott, ahány törpe él a városban. A továbbiakban azzal a szóhasználattal élünk, hogy egészségesnek csak azt a törpét mondjuk, aki nem beteg, de nem is immunis. A feladat feltétele ekkor kissé módosul; beteg barátait mind az egészséges, mind az immunis törpék naponta látogatják.

Tegyük föl tehát, hogy voltak törpék, akik többször is megbetegedtek, s tekintsük közülük az (egyik) első visszaesőt, legyen ez az  $A$  törpe, s aki másodszor megfertőzte,  $B$ . Jelölje  $X$  azt a napot, amikor  $A$  másodszor megfertőződött, aznap  $\circ$  egészséges volt,  $B$  pedig beteg. Mivel  $A$  az egyik első visszaeső, ezért az nem lehetséges, hogy  $B$  ezelőtt bármikor is beteg lett volna. Így immunis sem lehetett, mert feltételünk szerint csak egy betegség utáni napon lehetett volna az.

Vizsgáljuk most azt a napot, amikor  $A$  először volt beteg. Az előbbieket szerint  $B$  aznap egészséges volt, s így másnapra megbetegedett,  $A$  pedig immunissá vált. Ám ekkor ez csak az  $X$  nap lehetett (hiszen  $X$  előtt  $B$  végig egészséges volt); akkor azonban a feltevés szerint  $A$  egészséges volt, s ez ellentmondás. Tehát minden törpe legfeljebb egyszer volt beteg, s így a járvány véges időn belül véget ért.

Az első rész bizonyításakor a következő jelölést használjuk:  $\bullet$  beteg törpét jelöl,  $\otimes$  immunisat,  $\circ$  pedig egészségeset. Tegyük föl, hogy volt egy háromtagú baráti társaság (vagyis három törpe, akik barátok, de nem barátai senki másnak), mely az első napon az előbbi jelöléssel így ábrázolható:



Ekkor a járvány a következőképpen terjedt köztük:



Látható, hogy egy végtelen ciklus jött létre, s így valóban lehetséges olyan helyzet, hogy a járvány sosem ér véget.

*Kegyess Bálint* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., I. o. t.) dolgozata alapján