Tekintsük a vizsgált kifejezést először az $x=y=z=1$ értékek esetén:

$$3\,|a+b+c|=3,$$

azaz

$$|a+b+c|=1. \tag{1}$$

Ezután az $x=y=0$, $z=1$ helyettesítéssel

$$|a|+|b|+|c|=1. \tag{2}$$

Összevetve (1)-et és (2)-t, majd négyzetre emelve

$$a^2+b^2+c^2+2\,|ab|+2\,|ac|+2\,|bc|=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc,$$

vagyis

$$|ab|+|ac|+|bc|=ab+ac+bc.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy

$$ab\geqslant 0,\quad ac\geqslant 0,\quad bc\geqslant 0. \tag{3}$$

Legyen most $x=1,\ y=-1,\ z=0$. Ekkor

$$|a-b|+|b-c|+|c-a|=2.$$

Felhasználva, hogy tetszőleges A,B számokra $|A|+|B|\geqslant|A-B|$, valamint (2)-t is figyelembe véve,

$$2=|a-b|+|b-c|+|c-a|\le|a|+|b|+|b|+|c|+|c|+|a|=2\,(|a|+|b|+|c|)=2.$$

Ez csak úgy teljesülhet, ha

$$|a-b|=|a|+|b|\,,\qquad |b-c|=|b|+|c|\,,\qquad |c-a|=|c|+|a|\,.$$

Az elsőt négyzetre emelve

$$a^2+b^2-2ab=a^2+b^2+2\,|ab|\,,$$

amiből

$$|ab|=-ab.$$

Ugyanez elvégezhető a másik két esetben is, tehát az

$$ab\leqslant 0,\quad bc\leqslant 0,\quad ca\leqslant 0$$

eredményre jutottunk. Ez és (3) együtt azt jelenti, hogy

$$ab=bc=ca=0,$$

ami pontosan akkor teljesül, ha az a,b,c számok közül legalább kettő 0.

Az $a=b=0$ esetet vizsgálva

$$|c|\cdot|z|+|c|\cdot|x|+|c|\cdot|y|=|x|+|y|+|z|$$

adódik, vagyis $c=\pm1$. Hasonlóan $a=c=0$ esetén $b=\pm1$, míg $b=c=0$ fennálltakor $a=\pm1$. Ezek valóban jók is, tehát a megoldást a következő számhármasok adják:

$(0,0,1)$, $(0,0,-1)$, $(0,1,0)$, $(0,-1,0)$, $(1,0,0)$, $(-1,0,0)$.

Hegedűs Márton (Főv. Fazekas M. Gyak. Gimn., I. o. t.) dolgozata alapján