Legyen a tetraéder belső pontja P, ennek az oldallapoktól mért távolságai d_1, d_2, d_3, d_4, a tetraéder magasságai és az oldallapok területei pedig rendre m_1, m_2, m_3, m_4 és T_1, T_2, T_3, T_4 (ahol d_i és m_i a T_i területű laphoz tartozik). Ha a P pontot összekötjük a tetraéder csúcsaival, ezzel 4 olyan tetraéderre bontottuk, amelyek térfogatai, az ismert összefüggés szerint

$$\frac{T_1d_1}{3};\ \frac{T_2d_2}{3};\ \frac{T_3d_3}{3};\ \frac{T_4d_4}{3},\quad \text{tehát}\quad V=\frac{T_1d_1}{3}+\frac{T_2d_2}{3}+\frac{T_3d_3}{3}+\frac{T_4d_4}{3};$$

továbbá $V=\dfrac{T_im_i}{3}$, azaz $T_i=\dfrac{3V}{m_i}$ $(i=1,2,3,4)$. Ezt az előző összefüggésbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$V=V\left(\frac{d_1}{m_1}+\frac{d_2}{m_2}+\frac{d_3}{m_3}+\frac{d_4}{m_4}\right),$$

vagyis

$$1=\frac{d_1}{m_1}+\frac{d_2}{m_2}+\frac{d_3}{m_3}+\frac{d_4}{m_4}. \qquad (1)$$

1993-10-312-1.eps

Mivel a P ponton át a tetraéder oldallapjaival párhuzamos síkokat fektettünk, a keletkező kis tetraéderek mindegyik lapja párhuzamos az eredeti test egy-egy lapjával, ami tetraéderek esetén elégséges feltétele a hasonlóságnak. Tehát a négy kis tetraéder hasonló az eredetihez. Hasonló testek térfogataránya a (lineáris) hasonlósági arány köbe, így a kis tetraéderek és az eredeti tetraéder hasonlósági arányai:

$$\frac{\sqrt[3]{V_1}}{\sqrt[3]{V}},\quad \frac{\sqrt[3]{V_2}}{\sqrt[3]{V}},\quad \frac{\sqrt[3]{V_3}}{\sqrt[3]{V}},\quad \frac{\sqrt[3]{V_4}}{\sqrt[3]{V}}.$$

Figyelembe véve, hogy két tetraéder hasonlósági aránya megegyezik a megfelelő magasságok arányával, valamint azt, hogy a kis tetraéderek P pontból induló magasságai éppen d_1, d_2, d_3, d_4, látjuk, hogy az előbb említett arányok rendre megegyeznek a

$$\frac{d_1}{m_1};\quad \frac{d_2}{m_2};\quad \frac{d_3}{m_3};\quad \frac{d_4}{m_4}$$

értékekkel; innen (1) alapján

$$\frac{\sqrt[3]{V_1}}{\sqrt[3]{V}}+\frac{\sqrt[3]{V_2}}{\sqrt[3]{V}}+\frac{\sqrt[3]{V_3}}{\sqrt[3]{V}}+\frac{\sqrt[3]{V_4}}{\sqrt[3]{V}}=1,$$

azaz

$$\sqrt[3]{V_1}+\sqrt[3]{V_2}+\sqrt[3]{V_3}+\sqrt[3]{V_4}=\sqrt[3]{V}.$$

Megjegyzés. Bár az ábráról látható, mégis felhívjuk a figyelmet: nem az egyes síkok által lemetszett tetraéderekről volt szó, hanem *a feldarabolás részei közt találhatókról.* 4 sík az eredeti tetraédert 14 részre osztotta fel, a vizsgált 4 kis tetraéderen túl 4 paralelepipedon is keletkezett és 6 ún. *prizmatoid.* Prizmatoidnak olyan síklapokkal határolt konvex testet nevezünk, amelynek összes csúcsa *két párhuzamos* síkban van, további lapjai pedig (konvex burokként) háromszögek vagy trapézok, esetleg paralelogrammák. Feladatunk prizmatoidjai ezt a feltételt *kétféleképpen is kielégítik.* Tekinthetők ferdén elmetszett paralelepipedonoknak is (úgy, hogy egy oldalél hossza 0 lesz).