

Jelölje x_i azt a tejmennyiséget, amelyet az i -edik törpe töltött szét, amikor rá került a sor. Tegyük fel, hogy ezek közül x_k az (egyik) legnagyobb. Mivel egy kör után a bögrékben ugyanannyi tej volt, mint kezdetben, azért a töltögetést tovább ismételve, a k -edik törpe ismét ugyanannyit fog széttölteni, mint először. Vizsgáljuk meg, hogyan változott a bögrékben lévő tej mennyisége. Először persze kiürült, utána $\frac{x_{k+1}}{6}$ liter került bele, majd $\frac{x_{k+2}}{6}$ liter, és így tovább, összesen hatszor. Mivel $x_i \leq x_k$ minden i -re, azért körbeérve legfeljebb $6 \frac{x_k}{6} = x_k$ liter lehetett a bögréjében; másfelől tudjuk, hogy pontosan x_k liter volt benne, ez viszont csak úgy lehet, ha $x_1 = x_2 = \dots = x_7$ teljesül. Jelölje ezt a közös értéket x .

Vizsgáljuk most megint a feladatban szereplő széttöltéseket! A sorrendben első törpének x liter tej volt a bögréjében. Miután a második széttöltötte tejét, az ő (ekkor üres) bögréjébe még ötször került $\frac{x}{6}$ liter tej, azaz neki az osztozás végén, s így annak kezdetén is $\frac{5x}{6}$ liter teje volt. Hasonlóan a harmadiknak $\frac{4x}{6}$ liter, majd sorra $\frac{3x}{6}$, $\frac{2x}{6}$, $\frac{x}{6}$, $\frac{0x}{6}$ jutott, tehát kezdetben is ennyi volt. A feltételek szerint

$$\frac{6x}{6} + \frac{5x}{6} + \dots + \frac{x}{6} + 0 = \frac{1}{2}, \quad \text{ahonnan} \quad x = \frac{6}{42}.$$

Tehát a bögrékben kezdetben rendre $\frac{6}{42}$, $\frac{5}{42}$, $\frac{4}{42}$, $\frac{3}{42}$, $\frac{2}{42}$, $\frac{1}{42}$, 0 liter tej volt.