Két szám abszolút értéke pontosan akkor egyenlő, ha négyzeteik egyenlőek. Ezt felírva a sorozat első $n+1$ tagjára:

$$\begin{aligned} a_1^2 &= 0 \\ a_2^2 &= (a_1+1)^2 = a_1^2 + 2a_1 + 1 \\ &\vdots \\ a_{n+1}^2 &= a_n^2 + 2a_n + 1. \end{aligned}$$

Az egyenlőségeket összeadva a következőt kapjuk:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n+1}^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + n,$$

vagyis

$$a_{n+1}^2 = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + n.$$

Mivel $a_{n+1}^2 \geqslant 0$, ezért

$$2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + n \geqslant 0,$$

amiből

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Vizsgáljuk meg, milyen esetben állhat egyenlőség. A gondolatmenetből kiolvasható, hogy pontosan akkor, ha $a_{n+1} = 0$. Ez $n = 2k$ esetén lehetséges is, például a $0, -1, 0, -1, \cdots, 0$ sorozat megfelelő. Az $n = 2k+1$ esetben azonban $a_{n+1} = a_{2k+2}$ szükségképpen páratlan: a sorozatra tett feltevésből ugyanis látható, hogy a páratlan indexű elemek párosak, a páros indexűek pedig páratlan egész számok, ekkor $a_{n+1} \neq 0$, egyenlőség nem állhat fönn.

Izsák Ferenc (Szombathely, Nagy Lajos Gimn., II. o. t.)