Mivel a legnagyobb közös osztó, a^2-b^2, pozitív, ezért $a>b$. Továbbá $0\le a\le 9, 0\le b\le 9$, de a és b egyszerre nem lehet 0. A feltétel szerint

$$(a^2-b^2)|(10a+b), \qquad \text{illetve} \qquad (a^2-b^2)|(10b+a).$$

Mivel két szám osztója osztója a két szám összegének és különbségének is:

$$(a^2-b^2)|(11a+11b), \qquad \text{és} \qquad (a^2-b^2)|(9a-9b).$$

Felhasználva az $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ összefüggést és az oszthatóság tulajdonságait:

(1) $a-b|11$, (2) $a+b|9$.

Mivel $a-b>0$ és $a+b\le 9$, ezért (1)-ből $a-b=1$. Az $a+b>0$ miatt (2)-ből $a+b=1$, $a+b=3$, illetve $a+b=9$ lehet. A három esetet megvizsgálva:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=1 \\ a-b=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=1 \\ b=0 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} a+b=3 \\ a-b=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=2 \\ b=1 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} a+b=9 \\ a-b=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=5 \\ b=4 \end{array}$$

Könnyen ellenőrízhetjük, hogy az eredményül kapott $(10,1)$, $(21,12)$, $(54,45)$ számpárok megfelelnek a feladat feltételeinek.

Várszegi Róbert (Tata, Eötvös J. Gimn., I. o. t.)
dolgozata alapján