Tekintsünk egy Q középpontú r sugarú K kört, melynek kerülete az O középpontú egységgömb felületére illeszkedik, és legyen T ezen kör kerületének egy pontja.

1993-03-121-1.eps

1. ábra

Mivel az OQ egyenes merőleges a kör síkjára, az OQT háromszög derékszögű, ezért Pitagorasz tétele szerint O pontnak a K kör síkjától való távolsága:

$$OQ=\sqrt{OT^2-TQ^2}=\sqrt{1-r^2}.$$

Így a Q pont rajta van az O körüli $\sqrt{1-r^2}$ sugarú ($r=1$ esetben elfajuló) S gömbön, és a K kör síkja érinti ezt a gömböt a Q pontban (1. *ábra*).

Megfordítva: ha Q' az S gömb felületének tetszőleges pontja, akkor az S gömböt Q'pontban érintő sík az egységgömböt egy r sugarú körben metszi.

Tehát az olyan r sugarú körök középpontjainak mértani helye, amelyek kerülete az egységgömb felületére illeszkedik, az S gömb felülete.

Ha $r=1$ (az elfajuló S gömb csak az O pontból áll), akkor a keresett egységsugarú körök éppen az egységgömbnek az OP egyenest tartalmazó síkokkal vett síkmetszetei, és ezen körök középpontja az O pont.

A továbbiakban feltehetjük, hogy $0<r<1$. A fentiek szerint ekkor a feladatban keresett mértani hely éppen a P pontot tartalmazó, az S gömböt érintő síkok érintési pontjai.

Ha $OP<\sqrt{1-r^2}$, azaz P az S gömb belsejében van, akkor nem létezik a P pontot tartalmazó, az S gömböt érintő sík, így a keresett mértani hely az üres halmaz.

Ha $OP=\sqrt{1-r^2}$, azaz P az S gömb felületén található, akkor pontosan egy olyan sík van, amely a gömböt a P pontban érinti,tehát a keresett mértani hely csak a P pontból áll.

Tegyük fel, hogy $OP>\sqrt{1-r^2}$, azaz P az S gömbön kívül van. Az S gömb felületének egy U pontja pontosan akkor lesz egy P ponton áthaladó sík érintési pontja, ha a PUO háromszög derékszögű (2. *ábra*), azaz teljesül rá Pitagorasz tétele:

$$PU=\sqrt{OP^2-OU^2}=\sqrt{OP^2+r^2-1}.$$

1993-03-122-1.eps

2. ábra

Most a megfelelő körök középpontjainak mértani helyeként az S gömb felületének és a P középpontú $\sqrt{OP^2+r^2-1}$ sugarú gömb felületének a metszetét, tehát egy kört kapunk, amelynek síkja merőleges a két gömb centrálisára, vagyis az OP egyenesre. Jelöljük ennek a körnek a középpontját O'-vel, sugarát r'-vel (3. *ábra*).

1993-03-122-2.eps

3. ábra

Az előbb mondottakat figyelembe véve láthatjuk, hogy az OUP derékszögű háromszög U csúcsból induló magasságának talppontja O', és az UO' magasság éppen a keletkezett kör sugara; ezért $OO'=\dfrac{OU^2}{OP}=\dfrac{1-r^2}{OP}$ és

$$r'=UO'=\frac{OU\cdot UP}{OP}=\frac{\sqrt{1-r^2}-\sqrt{OP^2+r^2-1}}{OP}.$$

A keresett mértani hely ebben az esetben tehát egy olyan O' középpontú r' sugarú kör, melynek síkja merőleges az OP egyenesre.