I. megoldás. A szögfelezőtétel szerint

(1) $$AD = \frac{CA}{CA+CB} \cdot AB$$

és

$$DB = \frac{CB}{CA+CB} \cdot AB.$$

1993-03-120-1.eps

1. ábra

1993-03-120-2.eps

2. ábra

Írjuk fel kétféleképpen az ABC háromszög területét:

$$T_{ABC} = \frac{AB \cdot m}{2} = \frac{CA \cdot CB}{2},$$

tehát

(2) $$m = \frac{CA \cdot CB}{AB}.$$

Először megmutatjuk, hogy $AD < m$. (1) és (2) szerint

$$AD < m \Leftrightarrow \frac{CA \cdot BA}{CA+CB} < \frac{CA \cdot CB}{AB},$$

azaz

$$AB^2 - CB^2 < CA \cdot CB,$$

ez pedig Pitagorasz tétele ($AB^2 = CA^2 + CB^2$) miatt ekvivalens a $CA^2 < CA \cdot CB$, vagyis a $CA < CB$ egyenlőtlenséggel.

Ugyanúgy láthatjuk be azt is, hogy $m < DB$.

II. megoldás. Jelöljük a háromszög C-ből induló magasságának talppontját T-vel. Mivel $CB > CA$, ezért $CAB\sphericalangle > CBA\sphericalangle$. Nyilvánvaló, hogy $BCT\sphericalangle = CAB\sphericalangle$ és $ACT\sphericalangle = CBA\sphericalangle$, ezért $BCT\sphericalangle > ACT\sphericalangle$, tehát $AD > AT$. A D pontban az AB átfogóra állított merőleges a BC és AC oldalegyeneseket a P és Q pontokban metszi az ábrának megfelelően.

A szögfelezőtétel szerint $\frac{BD}{AD} = \frac{BC}{CA}$. Az ABC háromszög hasonló a PBD és az AQD háromszögekhez, hiszen szögeik megegyeznek; tehát

$$\frac{DB}{AD} = \frac{BC}{CA} = \frac{DB}{DP} = \frac{DQ}{AD}.$$

Innen $AD = DP$ és $DB = DQ$ adódik.

Figyelembe véve, hogy $DP < m < DQ$, kapjuk, hogy $AD < m < DB$, és ezt kellett bizonyítanunk.

Gincsai Tibor (Nyíregyháza 1.sz. Benczur Gyula Ált. Isk. 8. o. t.)
dolgozata alapján