Először megmutatjuk, hogy minden ABC háromszög felosztható 7 hegyesszögű háromszögre.

Ha az ABC háromszög hegyesszögű, akkor középvonalaival feloszthatjuk négy egybevágó háromszögre, amelyek mindegyike az eredetihez hasonló. Ezek egyikét ismét négy hegyesszögű háromszögre osztva az eredeti ABC háromszöget 7 hegyesszögű háromszögre osztottuk.

1993-02-073-1.eps

1. ábra

Ha az ABC háromszög derékszögű vagy tompaszögű, akkor a következő módszert alkalmazzuk (*1. ábra*). Tegyük fel, hogy C a nem hegyesszögű csúcs. Legyen O a beírt kör középpontja, és rajzoljuk meg a beírt kört. Húzzuk meg a beírt körnek az OA és OB szakaszokra merőleges érintőit, ezeknek az oldalakkal való metszéspontjai A_1, A_2, B_1, B_2 az ábrának megfelelően. Így két egyenlő szárú háromszöghöz – az A_1AA_2 és B_1BB_2 háromszögekhez – valamint az $A_1A_2CB_2B_1$ érintőötszöghöz jutunk. Ez utóbbi 5 háromszögre bontható az O pontból a csúcspontokba vezető szakaszokkal. Ezek a szakaszok felezik az ötszög szögeit, amelyek tompaszögek (illetve a C csúcsnál lehet derékszög is).

Ezek alapján

$$OA_1B_1\sphericalangle = \frac{1}{2}A_2A_1B_1\sphericalangle, \quad \text{ezért} \quad 45^\circ = \frac{1}{2}\cdot 90^\circ < OA_1B_1\sphericalangle < \frac{1}{2}\cdot 180^\circ = 90^\circ,$$

hasonlóan $45^\circ < AB_1A_1 < 90^\circ$. Így $B_1OA_1\sphericalangle = 180^\circ - OA_1B_1\sphericalangle - OB_1A_1\sphericalangle < 90^\circ$, tehát az A_1OB_1 háromszög hegyesszögű. Hasonlóan mutathatjuk meg, hogy a B_1OB_2, B_2OC_1, COA_2, A_2OA_1 háromszögek is hegyesszögűek, vagyis az ABC háromszöget 7 hegyesszögű háromszögre osztottuk.

A feladat második részéhez először néhány egyszerű megállapítást teszünk.

1. Egy tompaszögű háromszög mindig felbontható 2 tompaszögű háromszögre a *2/a ábrán* látható módon, és ezt a felbontást tovább folytatva láthatjuk, hogy minden tompaszögű háromszög felbontható tetszőleges számú tompaszögű háromszögre.

1993-02-073-2.eps

2/a ábra

2. Minden nem tompaszögű háromszög felbontható 3 tompaszögű háromszögre: Vegyük a háromszög legnagyobb oldalához tartozó magasságvonal magasságpont és talppont közé eső szakaszának egy P pontját, e pontot a csúcsokkal összekötő szakaszok éppen egy ilyen felbontást adnak (*2/b ábra*).

1993-02-073-3.eps

2/b ábra

Mindezeket figyelembe véve láthatjuk, hogy $n \geqslant 3$ esetén minden ABC háromszög felbontható n tompaszögű háromszögre (speciálisan $n = 7$-re is), például a következő módon: Először felosztjuk az ABC háromszöget három tompaszögű háromszögre, majd a kapott egyik háromszöget tovább $n-2$ tompaszögű háromszögre (*3. ábra*).

1993-02-074-1.eps

3. ábra

Megjegyzések. **1.** $n \geqslant 7$ esetén minden háromszög felbontható n hegyesszögű háromszögre. $n = 7$-re ezt megmutattuk; $n > 7$ esetén pedig bontsuk fel a háromszögünket egy hegyesszögű és egy tompaszögű háromszögre (ezt minden háromszögnél megtehetjük), majd ezt a felbontást ismételjük meg minden lépésben a kapott tompaszögű háromszögre egészen addig, amíg nem kapunk $n-7$ hegyesszögű és 1 tompaszögű háromszöget az eredeti háromszög belsejében; ekkor a tompaszögű háromszöget 7 hegyesszögűre bontva éppen egy kívánt felosztást kapunk.

2. Nyilvánvaló, hogy $n < 3$ esetén semelyik hegyesszögű háromszög sem bontható fel n tompaszögűre.

Lényegesen nehezebb belátni a következő állítást: ha $n < 7$, akkor se a tompaszögű, se a derékszögű háromszögek nem oszthatók fel n hegyesszögű háromszögre.