I. megoldás. Jelöljük a háromszög oldalait a, b, c-vel, magasságait a szokásos módon m_a, m_b, m_c-vel, területét T-vel. Világos, hogy $m_a \le f_a$, $m_b \le f_b$, $m_c \le f_c$ és $2T = am_a = bm_b = cm_c = (a+b+c)r$. Így

$$f_a + f_b + f_c \ge m_a + m_b + m_c = r\left(\frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c}\right),$$

és itt

$$\frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} =$$
$$= 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \ge 3 + 3 \cdot 2 = 9.$$

II. megoldás. Az Erdős–Mordell egyenlőtlenség szerint (lásd. *Reiman István*: A geometria és határterületei, 230. old.), ha P belső pontja egy háromszögnek (*1. ábra*), akkor $PA + PB + PC \ge 2(PT_A + PT_B + PT_C)$.

1993-02-072-1.eps

1. ábra

Speciálisan, ha P a beírt kör középpontja (*2. ábra*), akkor

$$PA + PB + PC \ge 6r.$$

1993-02-072-1.eps

2. ábra

A $PA^{'}$; $PB^{'}$; $PC^{'}$ szakaszok mindegyike legalább r, ezért

$$f_a + f_b + f_c = PA + PA^{'} + PB + PB^{'} + PC + PC^{'} \ge 9r.$$