I. megoldás. Jelöljük O-val azt a pontot, amely az egyik négyzetnek középpontja, a másik négyzetnek csúcsa, továbbá M-mel és N-nel a két négyzet oldalainak metszéspontjait az *1. ábrának* megfelelően.

1993-02-071-1.eps

1. ábra

Ekkor a két négyzet közös része az $ONBM$ (esetleg elfajuló) négyszög, amelynek területe

$$T_{ONBM} = T_{OBM} + T_{ONB}.$$

Az ONB háromszög egybevágó az OMA háromszöggel, mert szögeik merőleges szárú hegyesszögek, és $OA = OB = 1/\sqrt{2}$; ezért $T_{OMA} = T_{ONB}$. Tehát $T_{ONBM} = T_{OBM} + T_{OMA} = T_{AOB} = 1/4$.

II. megoldás Az O középpontú négyzetet a másik négyzet O-t tartalmazó oldalegyenesei négy egybevágó része osztják (*2. ábra*), hiszen egy O körüli $90°$-os forgatás ezeket a részeket egymásba viszi. Mivel a kapott négy egybevágó alakzat közül az egyik éppen a két négyzet közös része, azért a keresett terület értéke $1/4$.

1993-02-071-2.eps

2. ábra

Megjegyzések 1. $M = A$ és $N = B$ esetén az OMA és ONB háromszögek elfajulóak, ekkor a két négyzet közös része éppen az AOB háromszög.

2. A feladat megoldásában felhasználtuk, hogy az O középpontú négyzet nem metszi a másik négyzet O-t nem tartalmazó oldalait; valóban, ha X az előbbi négyzet oldalának pontja, akkor $OX \leqslant OB \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1$, míg az utóbbi négyzet O-t nem tartalmazó oldalegyenesei O-tól egységnyi távolságra vannak.

Ha a feladatot úgy módosítjuk, hogy az O középpontú négyzet továbbra is egységnégyzet, míg a másik, O csúcspontú négyzet oldala a, akkor könnyen igazolhatók a következő állítások:

Ha $a \geqslant 1/\sqrt{2}$, akkor a közös rész $1/4$ területű.

Ha $a \leqslant 1/(2\sqrt{2})$, akkor az a oldalú négyzetet tartalmazza a másik négyzet, így a közös rész a^2 területű.

Ha $1/(2\sqrt{2}) < a < 1/\sqrt{2}$, akkor a közös rész területe függ a két négyzet helyzetétől; ez a terület pontosan akkor maximális, ha a két négyzet oldalai párhuzamosak, és akkor minimális, ha a két négyzet oldalai egymással $45°$-os szöget zárnak be.