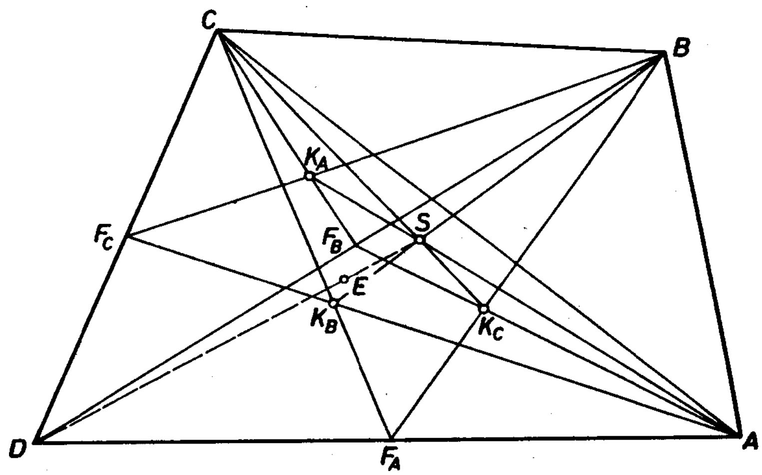
Legyen $ABCD$ egy tetraéder, súlypontja S, a D csúcsból kiinduló éleinek felezőpontja F_A, F_B, F_C, a D-re illeszkedő lapok súlypontjai K_A, K_B, K_C, végül a DS szakasz S-hez közelebbi ötödölőpontja E. Megmutatjuk, hogy ehhez a 12 ponthoz meg lehet adni 12, a feltételeknek megfelelő síkot.



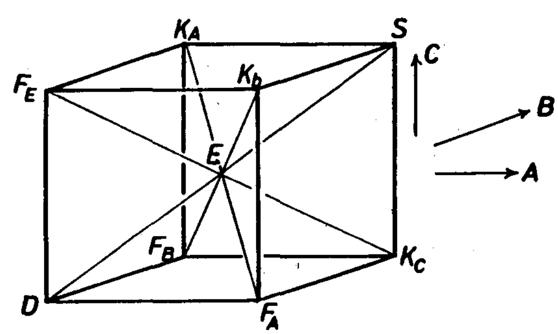
1. ábra

A súlypont definíciójából következik, hogy az $(A,\ K_C,\ F_B)$; $(A,\ K_B,\ F_C)$; $(B,\ K_A,\ F_C)$; $(B,\ K_C,\ F_A)$; $(C,\ K_A,\ F_B)$; $(C,\ K_B,\ F_A)$; $(A,\ K_A,\ S)$; $(B,\ K_B,\ S)$ és $(C,\ K_C,\ S)$ ponthármasok kollineárisak. A DS, F_AK_A, F_BK_B és F_CK_C egyenesek mindegyike átmegy az E ponton. Ezt vektorok segítségével bizonyítjuk: Ha $\overrightarrow{DA}=60\mathbf{a}$, $\overrightarrow{DB}=60\mathbf{b}$ és $\overrightarrow{DC}=60\mathbf{c}$, akkor a felezőpont, illetve a súlypont helyvektorának ismert tulajdonsága alapján $\overrightarrow{DF}_A=30\mathbf{a}$, $\overrightarrow{DF}_B=30\mathbf{b}$, $\overrightarrow{DF}_c=30\mathbf{c}$, $\overrightarrow{DK}_A=20(\mathbf{b}+\mathbf{c})$, $\overrightarrow{DK}_B=20(\mathbf{a}+\mathbf{c})$ és $\overrightarrow{DK}_C=20(\mathbf{a}+\mathbf{b})$. $\overrightarrow{DS}=15(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$, ezért $\overrightarrow{DE}=12(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$. Viszont a szakaszt adott arányban osztó pont helyvektorára vonatkozó képlet szerint a $12(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$ vektor éppen az F_AK_A, F_BK_B és F_CK_C szakaszokat $3:2$ arányban osztó pont helyvektora, mivel

$$\frac{2\cdot 30\mathbf{a}+3\cdot 20(\mathbf{b}+\mathbf{c})}{2+3}=\frac{2\cdot 30\mathbf{b}+3\cdot 20(\mathbf{a}+\mathbf{c})}{2+3}=\frac{2\cdot 30\mathbf{c}+3\cdot 20(\mathbf{a}+\mathbf{b})}{2+3}=$$
$$=12(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

Ezek után már könnyen megadhatjuk a feltételeknek eleget tevő 12 síkot: az eredeti tetraéder D-n átmenő 3 lapsíkja; az a 4 sík, amelyik a tetraéder egy D-n át nem menő élét és az ezzel szemközti él felezőpontját tartalmazza, továbbá átmegy a tetraédernek és két lapjának a súlypontján (ilyen sík pl. az A, B, F_C, S, K_A, K_B pontok síkja); végül az a 6 sík, amely átmegy a $DF_AK_BF_CF_BK_CSK_A$ csonkagúla két-két szemközti élén, az E ponton és az A, B, C pontok egyikén (ilyen sík pl. az F_A, K_B, F_B, K_A, E, C pontok síkja). Ez utóbbi síkok létezésének bizonyítása azon múlik, hogy az említett csonkagúláról megmutattuk, hogy valamennyi testátlója átmegy az A, B, C pontok valamelyikén.

A 12 pont közül semelyik 6 nem kollienáris, ezért a 12 síkkal együtt eleget tesznek a feladat feltételeinek.



2. ábra

Megjegyzések 1. A feladatban szereplő alakzat tulajdonképpen a projektív geometriában ismert ún. *Reye-féle konfiguráció.* Ennek a projektív térben a legegyszerűbb előállítása a következő: a pontok egy kocka csúcsai, a kocka középpontja és a kocka három élirányának megfelelő ideális pontok; a síkok a kocka lapsíkjai és két-két szemközti élét tartalmazó síkok. *A 2. ábrán* jól látható az analógia megoldásunk és a kocka között.

2. Belátható, hogy négy gömb páronként vett külső és belső hasonlósági pontjai is a feladatban szereplő konfigurációt alkotják.