

Először megmutatjuk, hogy $x = 1992$ esetén a kifejezés értéke négyzetszám. Valóban, $4^{27} + 4^{1010} + 4^{1992} = (2^{27})^2 + (2^{1992})^2 + 2^{2020} = (2^{27})^2 + (2^{1992})^2 + 2 \cdot 2^{27} \cdot 2^{1992} = (2^{27} + 2^{1992})^2$.

Ezután bebizonyítjuk, hogy semmilyen $x > 1992$ egész számra sem kaphatunk négyzetszámot. A kifejezésből 4^{27} -t kiemelve:

$$4^{27}(1 + 4^{983} + 4^{x-27}).$$

Mivel 4^{27} négyzetszám, és $x > 1992$, így elegendő az $1 + 4^{983} + 4^{x-27}$ értékét vizsgálni. Tegyük fel, hogy ez mégis négyzetszám. Ekkor mivel $1 + 4^{983} + 4^{x-27} > (2^{x-27})^2$, ezért nem lehet kisebb $2^{x-27} + 1$ négyzeténél:

$$1 + 4^{983} + 4^{x-27} \geq (2^{x-27} + 1)^2 = 1 + 4^{x-27} + 2^{x-26},$$

amiből

$$2^{1966} \geq 2^{x-26},$$

vagyis

$$1966 \geq x - 26 > 1992 - 26 = 1966,$$

ami ellentmondás. Tehát a keresett szám 1992.

Megjegyzés. A közölt megoldás után joggal merül fel a kérdés, hogyan lehetett az $x = 1992$ értékére rájönni. Mivel a megadott háromtagú összeg tagjai négyzetszámok, innen adódik az az ötlet, hogy a kifejezést egy kéttagú összeg négyzetének tekintsük, $a^2 + b^2 + 2ab$ alakban felírva. Ekkor három esetet kell megkülönböztetnünk aszerint, hogy a három közül melyik tagot választjuk $2ab$ -nek. Például $2ab = 4^{27}$ esetén $\{a^2, b^2\} = \{4^{1010}, 4^x\}$, így $x = -957$. A $2ab = 4^{1010}$, illetve $2ab = 4^x$ választás esetén hasonlóan $x = 1992$, illetve $x = 519$.