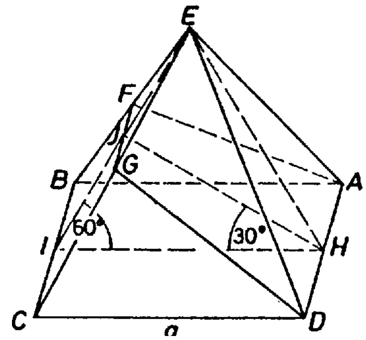
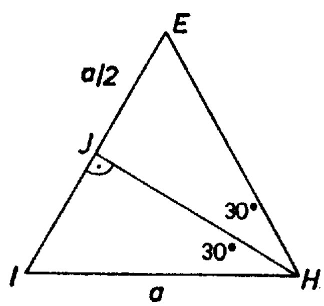
Legyen a gúla alaplapja az $ABCD$ négyzet, ötödik csúcsa E. Az AED oldallap és az alaplap szögfelezője messe az EB, illetve EC élt az F, illetve a G pontban. Legyen H és I az AD, illetve BC élek felezőpontja, J pedig a szögfelező sík és az EI szakasz döféspontja (*1. ábra*).



1. ábra

A szögfelező sík az $ABCDE$ gúlából az $AFGDE$ gúlát vágja le. Először ennek a térfogatát határozzuk meg. Legyen az $ABCD$ négyzet oldalhossza a. Mivel az oldallapok az alaplappal $60°$-os szöget zárnak be, azért $EHI\sphericalangle = EIH\sphericalangle = 60°$, vagyis az EHI háromszög szabályos, amelynek oldalhossza $HI = AB = a$. Mivel $AFGD$ szögfelező sík, azért $JHI\sphericalangle = 30°$, azaz HJ magasságvonal az EHI háromszögben (*2. ábra*).



2. ábra

A J pont felezi az EI szakaszt, ezért a J-n átmenő, BC-vel párhuzamos FG szakasz középvonal az EBC háromszögben, hossza $FG = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$. Az $ADGF$ négyszög olyan trapéz, amelynek két alapja a, illetve $\frac{a}{2}$, magassága pedig $HJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; ezek alapján területe:

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \cdot 3\sqrt{3}}{8}.$$

EJ merőleges az $ADFG$ síkra (hiszen $EJ \perp FG$ és $EJ \perp HJ$), ezért az $AFGDE$ gúla E-hez tartozó magassága $EJ = \frac{a}{2}$; így a gúla térfogata:

$$V_{AFGDE} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot 3\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}.$$

Az $ABCDE$ gúla E-hez tartozó magassága megegyezik az EHI szabályos háromszög E-hez tartozó magasságával, tehát ennek a gúlának a térfogata:

$$V_{ABCDE} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{3}}{6}.$$

Az $ABCDFG$ test térfogata a két gúla térfogatának különbsége

$$V_{ABCDFG} = V_{ABCDE} - V_{AFGDE} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{3}}{6} - \frac{a^3 \cdot \sqrt{3}}{16} = \frac{a^3 \cdot 5\sqrt{3}}{48}.$$

A szögfelező sík által meghatározott két test térfogatának aránya:

$$\frac{V_{AFGDE}}{V_{ABCDFG}} = \frac{\frac{a^3 \cdot \sqrt{3}}{16}}{\frac{a^3 \cdot 5\sqrt{3}}{48}} = \frac{3}{5}.$$

Jombik Zoltán (Esztergom, Temesvári P. Ferences Gimn., I. o. t.)
dolgozata alapján