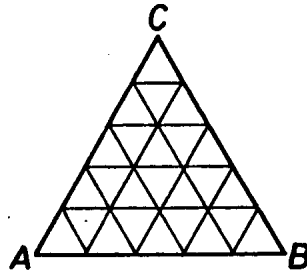
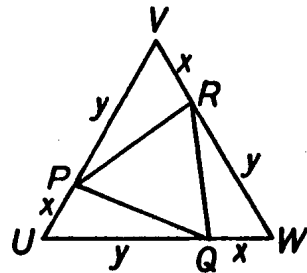


Nevezzük normálisnak azokat a szabályos háromszögeket, amelyek csúcsai a felosztással keletkezett hálózat rácspontjai, és amelyek az eredeti háromszöggel azonos állásúak (vagyis az eredeti háromszög pozitív arányú középpontos kicsinyítésével kaphatók).



1. ábra

Jelöljük a k egységnyi oldalhosszúságú normális háromszögek számát a_k -val (nyilván $1 \leq k \leq 5$; az eredeti háromszög oldalait 5 egységnyinek véve, $a_5 = 1$). Legyen PQR egy tetszőleges szabályos részháromszög. Tegyük fel, hogy például az AC egyeneshez P , az AB egyeneshez Q , a BC egyeneshez R van a legközelebb. A P, Q, R pontokon át párhuzamost húzva rendre AC -vel, AB -vel, illetve BC -vel olyan UVW normális háromszöghöz jutunk, amely UV, UW, VW oldalain tartalmazza P -t, Q -t és R -et. A háromszögek szabályossága miatt $UP = VR = WQ = x$ és $PV = RW = QU = y$. Ha az UVW háromszög oldala k egység, akkor $0 \leq x \leq k - 1$, így UVW -be a PQR -éhez hasonló módon k darab rácsháromszög írható. Mivel minden rácsháromszög pontosan egy normális háromszögbe írható, azért az ABC -ben lévő szabályos rácsháromszögek száma: $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5$.



2. ábra

Legyen XYZ egy k oldalhosszúságú normális háromszög, és $XY \parallel AB, YZ \parallel BC, ZX \parallel CA$. Az XYZ -t egyértelműen meghatározza az, hogy XY az AB -től, YZ a BC -től, illetve ZX a CA -tól hány sornyi távolságra van. Ha a szóban forgó távolságok a, b , illetve c , akkor $0 \leq a, b, c$ és $a + b + c = 5 - k$. A fenti két feltételnek eleget tevő bármely a, b, c számhármass egy k oldalhosszúságú normális háromszöget határoz meg; így a_k megegyezik azon egész számokból álló a, b, c rendezett számhármassoknak a számával, amelyekre $a + b + c = 5 - k$ teljesül. Itt az a értéke 0 -tól $5 - k$ -ig változhat; az a ismeretében b már csak a $0, 1, \dots, 5 - k - a$ számok valamelyike lehet, ami $6 - k - a$ lehetőség (rögzített a és b mellett c egyértelműen meghatározott). Tehát

$$a_k = \sum_{a=0}^{5-k} (6 - k - a) = (6 - k)^2 - \frac{(6 - k)(5 - k)}{2} = \frac{(6 - k)(7 - k)}{2}.$$

Így a keresett háromszögek száma:

$$15 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = 70.$$

Megjegyzés. Ha 5 helyett n részre osztjuk az ABC háromszög oldalait, akkor a szabályos rácsháromszögek száma:

$$\sum_{k=1}^n k \cdot \frac{(n + 1 - k)(n + 2 - k)}{2} = \frac{n(n + 1)(n + 2)(n + 3)}{24} = \binom{n + 3}{4}.$$