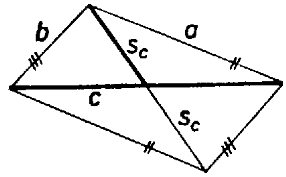
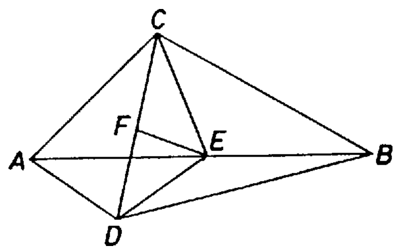
I. megoldás. Ismert, hogy egy tetszőleges háromszög oldalai és súlyvonala közt a szokásos jelöléseket használva fennáll a következő összefüggés: $c^2 + 4s_c^2 = 2(a^2 + b^2)$. (Ennek bizonyítása megtalálható pl. a *Geometriai feladatok gyűjteménye* I. kötetének 1673. feladatában).



1. ábra



2. ábra

Legyen az AB szakasz felezőpontja E, a CD szakasz felezőpontja pedig F. A súlyvonalra vonatkozó összefüggést az ABC, ABD és DEC háromszögekre felírva:

$$AB^2 + 4CE^2 = 2(AC^2 + BC^2), \tag{1}$$

$$AB^2 + 4DE^2 = 2(AD^2 + BD^2), \tag{2}$$

$$CD^2 + 4EF^2 = 2(DE^2 + CE^2). \tag{3}$$

(1)-et és (2)-t összeadva, majd ebbe helyettesítve (3)-at, kapjuk, hogy

$$2(AC^2 + BC^2 + AD^2 + BD^2) = 2AB^2 + 4(CE^2 + DE^2) = 2AB^2 + 2CD^2 + 8EF^2.$$

Átrendezve:

$$(AB^2 - AC^2 - BC^2) + 4EF^2 = AD^2 + BD^2 - CD^2.$$

Mivel az ABC háromszög tompaszögű, azért $AB^2 > AC^2 + BC^2$, tehát a bal oldalon álló kifejezés pozitív; ezért az egyenlőség jobb oldalán álló kifejezés is az, vagyis $AD^2 + BD^2 > CD^2$.

Hegedűs Márton (Nyíregyháza, 1. sz. Gyak. ÁIt. Isk., 8. o. t.)
dolgozata alapján

II. megoldás. Vektorok skaláris szorzatát használva oldjuk meg a feladatot.

$$\overrightarrow{CD}^2 \leq \overrightarrow{CD}^2 + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB})^2 =$$

$$\overrightarrow{CD}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + \overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 - 2\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} =$$

$$(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA})^2 + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB})^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BD}^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}.$$

Mivel az ABC háromszögben C-nél tompaszög van, azért $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} < 0$, vagyis $\overrightarrow{CD}^2 < \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BD}^2$. Ez éppen a bizonyítandó állítás.

Székelyhidi László (Debrecen, Tóth Á. Gimn., I. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A II. megoldásban nem használtuk ki, hogy a D pont benne van az ABC síkban.