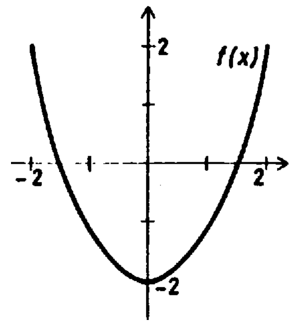
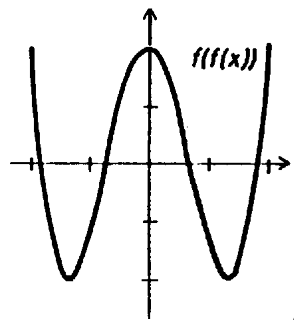
A bizonyítást többféle módon is végezhetjük. Kiszámolhatjuk $f(f(f(x))) - x$-et,majd az így kapott nyolcadfokú egyenletet megoldjuk (könnyen felírhatjuk első és harmadfokú tényezők szorzataként). Az is elegendő, ha mutatunk csatlakozó intervallumokat, ahol a függvény előjelet vált. Most egy egyszerűbb, de legalábbis kevésbé számolós megoldást mutatunk.

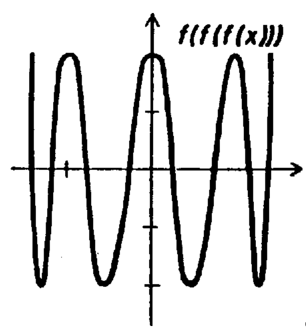
Ha $|x| = 2 + \alpha$, ahol $\alpha > 0$, akkor $f(x) = (2+\alpha)^2 - 2 = 2 + \alpha + (3\alpha + \alpha^2) > 2 + \alpha = |x|$, azaz $|x| > 2$ esetén $f(x) > |x|$, s így $f(f(f(x))) > f(f(x)) > f(x) > x$. Elegendő tehát a $[-2; 2]$ intervallumot vizsgálni.



1. ábra



2. ábra



3. ábra

Felrajzolva f grafikonját látható, hogy a $[-2; 0]$, illetve a $[0; 2]$ intervallumban f felveszi a $[-2; 2]$ zárt intervallum minden értékét, méghozzá mindegyiket pontosan egyszer. Ezután ugyanígy a $[-2; 0]$ és a $[0; 2]$ is 2–2 részre osztható, amelyeken $f(f(x))$ veszi fel egyszeresen a $[-2; 2]]$ intervallum számait (az egyes részintervallumok: $[-2; \sqrt{2}]$, $[-\sqrt{2}; 0]$, $[0; \sqrt{2}]$, $[\sqrt{2}; 2]$, bár a konkrét értékekre nincs is szükségünk), majd ezek mindegyike további két részre osztható, ahol $f(f(f(x)))$ viselkedik ugyanígy. Ez az összesen nyolc intervallum lefedi az egész $[-2; 2]$ intervallumot. Felrajzolhatjuk $f(f(f(x)))$ sematikus grafikonját.

A nyolc intervallum mindegyikében pontosan egy megoldása van az $x = f(f(f(x)))$ egyenletnek, és azok, az utolsót kivéve, az intervallumok belsejében találhatók, így nem eshetnek egybe. Tehát kaptunk nyolc különböző valós megoldást, és több megoldás nincs, mivel az egyenlet nyolcadfokú.