Először két olyan művelet elvégzésére mutatunk eljárást, amelyet a továbbiakban gyakran fogunk használni.

1. Egy x kiindulási szám és egy racionális szám szorzása.

Legyen a racionális szám $\dfrac{p}{q}$, ahol p egész, q pozitív egész szám. Ekkor

$$\frac{x}{q}=\frac{1}{q\cdot\frac{1}{x}}=\frac{1}{\underbrace{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\cdots+\frac{1}{x}}_{q}},\qquad \text{így}\qquad \frac{|\,p\,|\cdot x}{q}=\underbrace{\frac{x}{q}+\frac{x}{q}+\cdots+\frac{x}{q}}_{|p|}.$$

Ha p negatív szám, akkor ugyanezt $-x=(x-x-x)$-szel hajtjuk végre.

2. Egy x szám köbének kiszámítása:

$$x^3=\frac{x^3-x}{1}+x=\frac{1}{\frac{x^2+1-x^2}{x^3-x}}+x=\frac{1}{\frac{x}{x^2-1}-\frac{1}{x}}+x=\frac{1}{\frac{1}{x-\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}}+x.$$

Most megadunk egy eljárást, amellyel bármely $\sqrt{x}+y$ alakú számból (x,y racionális számok, $y\neq 0$, $y^2\neq x$) előállítható az 1. (Az $x=19, y=92$ választással az a) feladatot oldjuk meg.) Az előzőek szerint kiszámíthatjuk $(\sqrt{x}+y)^3$-t, majd ebből $(x+3y^2)$-szer (ez egy racionális szám) levonjuk $(\sqrt{x}+y)$-t:

$$(\sqrt{x}+y)^3-(x+3y^2)(\sqrt{x}+y)=$$

$$x\sqrt{x}+3xy+3y^2\sqrt{x}+y^3-x\sqrt{x}-xy-3y^2\sqrt{x}-3y^3=2xy-2y^3=2y(x-y^2).$$

Ez egy nullától különböző racionális szám, jelölje $\dfrac{q}{p}$. Megszorozzuk $\dfrac{p}{q}$-val, s így megkapjuk az 1-et.

A következőkben $\sqrt[19]{x}$ alakú számból állítjuk elő az 1-et (b) eset). (x nullától különböző racionális szám.) Kiszámítjuk először

$$(\ldots((\sqrt[19]{x}\underbrace{)^3)^3\ldots)^3}_{\text{7-szer}}=\sqrt[19]{x^{(3^7)}}=\sqrt[19]{x^{2187}}=\sqrt[19]{x^{115\cdot 19}\cdot x^2}=x^{115}\cdot\sqrt[19]{x^2}$$

értékét. Mivel $x^{115}\neq 0$ racionális szám, azért ezt x^{-115}-nel szorozva $\sqrt[19]{x^2}$-et kapjuk. Ezután

$$\frac{1}{\sqrt[19]{x}-\sqrt[19]{x^2}}-\frac{1}{\sqrt[19]{x}+\sqrt[19]{x^2}}=\frac{2\sqrt[19]{x^2}}{\sqrt[19]{x^2}-\sqrt[19]{x^4}}=\frac{2}{1-\sqrt[19]{x^2}}$$

reciprokának kétszeresét véve $(1-\sqrt[19]{x^2})$-hez jutunk, ehhez adjuk még hozzá $\sqrt[19]{x^2}$-et.

A c) esetben először megmutatjuk, hogy ha x és y olyan racionális számok, melyek négyzetgyöke irracionális, akkor $a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$ alakú számokból (a,b racionálisak) csak ugyanilyen alakú számot kaphatunk. Az összeadásra és kivonásra ez ekvivalens. Vizsgáljuk a reciprokképzést ($a^2+b^2\neq 0$ esetén):

$$\frac{1}{a\sqrt{x}+b\sqrt{y}}=\frac{a\sqrt{x}-b\sqrt{y}}{(a\sqrt{x}+b\sqrt{y})(a\sqrt{x}-b\sqrt{y}}=\frac{a\sqrt{x}-b\sqrt{y}}{a^2x-b^2y}=$$
$$\frac{a}{a^2x-b^2y}\sqrt{x}+\frac{b}{b^2y-a^2x}\sqrt{y}.$$

Ha $a\sqrt{x}-b\sqrt{y}=0$, akkor nem bővíthetünk vele. Ám ekkor $\sqrt{x}=\dfrac{b}{a}\sqrt{y}$ (ha $a=0$, akkor b is nulla lenne), így $a\sqrt{x}+b\sqrt{y}=a\left(\dfrac{b}{a}\sqrt{y}\right)+b\sqrt{y}=2b\sqrt{y}$, és ennek reciproka $\dfrac{1}{2b\sqrt{y}}=\dfrac{1}{2by}\cdot\sqrt{y}$, szintén $c\sqrt{x}+d\sqrt{y}$ alakú.

Végül belátjuk, hogy az 1 nem áll elő ilyen alakban; vagyis ebben az esetben a válasz nemleges. Tegyük fel ugyanis, hogy $1=a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$, alkalmas a és b racionális számokkal. Ekkor $(1-a\sqrt{x})^2=b^2y$, azaz $1-2a\sqrt{x}+a^2x=b^2y$, $2a\sqrt{x}=1+a^2x-b^2y$. Mivel $1+a^2x-b^2y$ racionális és $\sqrt{x}$ irracionális, azért szükségképpen $a=0$. Így $1=b\sqrt{y}$, $\sqrt{y}=\dfrac{1}{b}$, holott $\sqrt{y}$ irracionális. Ez ellentmondás, tehát állításunk igaz.

György András (Budapest, Árpád Gimn., II. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. Azon, hogy adott egy kiindulási szám, a következőt értettük. Nem csupán a tizedesjegyei vannak előttünk a számológép kijelzőjén, hanem ismerjük „speciális” előállításait is. Például az a) esetben nemcsak a $\sqrt{x}+y$ számot, hanem magát x-et és y-t, sőt törtfelbontásukat is ismertnek tekintjük (nem a számológépben, hanem a „fejünkben”). Ezért vonhattuk ki $(\sqrt{x}+y)^3$-ből$(\sqrt{x}+y)\cdot(x+3y^2)$-et.

2. Egy további, viszonylag általános előállítási tételt is kimondhatunk: az x kiindulási számból megkaphatjuk az összes

$$y_k=\frac{a_{2k}x^{2k}+a_{2k-2}x^{2k-2}+\ \ldots+a_0}{a_{2k-1}x^{2k-1}+a_{2k-3}x^{2k-3}+\ \ldots+a_1x},$$

$$z_k = \frac{a_{2k}x^{2k} + a_{2k-2}x^{2k-2} + \ \dots + a_0}{a_{2k+1}x^{2k+1} + a_{2k-1}x^{2k-1} + \ \dots + a_1 x}$$

alakú számokat (az a_i-k racionálisak). Ezt például k szerinti indukcióval bizonyíthatjuk.

Szeredi Tibor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o. t.) dolgozata alapján

Természetesen az a) és b) esetre számos más konkrét eljárás is adható.