

Megmutatjuk, hogy az egyenlet egyetlen, egészekből álló megoldása $x = y = z = 0$. Tétélezzük fel, hogy x , y , z egy ettől különböző megoldás. Jelölje x , y , z legnagyobb közös osztóját d ; az egyenlet mindkét oldalát d^2 -tel osztva kapjuk, hogy van olyan x_1, y_1, z_1 megoldás is, amelyre az x_1, y_1, z_1 számoknak már nincs 1-nél nagyobb közös osztója.

Írjuk az egyenlőséget $3(x_1^2 + y_1^2) = x_1^2 + z_1^2$ alakba. A bal oldal 3-nak többszöröse, így $x_1^2 + z_1^2$ is osztható 3-mal. Négyzetszámot 3-mal maradékosan osztva 0-t vagy 1-et kaphatunk csak maradékul. Ezért $x_1^2 + z_1^2$ csak akkor osztható 3-mal, ha x_1 és z_1 egyaránt osztható 3-mal; ekkor $x_1^2 + z_1^2$ osztható 9-cel, tehát $x_1^2 + y_1^2$ is osztható 3-mal. Ez ismét csak úgy lehetséges, ha x_1 és y_1 is osztható 3-mal, ami ellentmondás, hiszen x_1 -nek, y_1 -nek és z_1 -nek a 3 nem lehet közös osztója.

Megjegyzés. Hasonlóan igazolhatjuk, hogy bármely $4k - 1$ alakú p prímszámmal a $(p - 1)x^2 + py^2 = z^2$ egyenletnek $x = y = z = 0$ -n kívül nem létezik más egész megoldása. Ehhez az előbbieket mintájára elegendő belátnunk, hogy két négyzetszám összege csak akkor osztható p -vel, ha a számok külön-külön p -vel oszthatók. Állításunkkal ellentétben tegyük föl, hogy valamely a és b egészekre $p \mid a^2 + b^2$ teljesül, de valamelyikük nem osztható p -vel. Ekkor nyilván a és b egyike sem osztható p -vel. Fermat (kis) tétele miatt a^{p-1} és b^{p-1} 1-et ad maradékul p -vel osztva, ezért $(a^2)^{(p-1)/2} + (b^2)^{(p-1)/2} = a^{p-1} + b^{p-1}$ a p -vel való maradékos osztásnál 2-t ad maradékul. A p -re tett feltevés szerint $\frac{p-1}{2}$ páratlan, ezért $(a^2)^{(p-1)/2} + (b^2)^{(p-1)/2}$ osztható $(a^2 + b^2)$ -tel, tehát p -vel is. Ellentmondáshoz jutottunk, hiszen p nem lehet osztója a 2-nek.