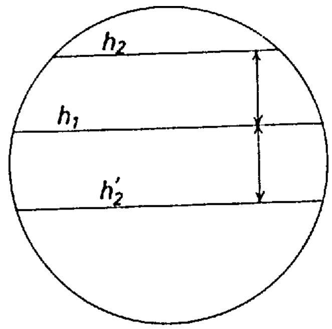
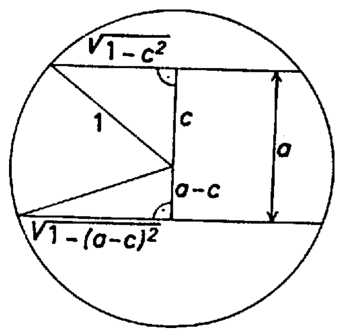
Megmutatjuk, hogy a lefedéshez szükséges körök száma $\left\lceil \frac{b}{\sqrt{4-a^2}} \right\rceil$ (ahol $\lceil x \rceil$- az $x$ felső egész része – a legkisebb, $x$-nél nem kisebb egész számot jelöli).




*1. ábra*

Először belátjuk, hogy egy egységsugarú kör két, egymástól $a \leq \sqrt{3}$ távolságra lévő párhuzamos húrjának együttes hossza legfeljebb $2\sqrt{4-a^2}$. Ha a $h_1$ és $h_2$ húrokat a velük párhuzamos átmérő nem választja szét, akkor a középponttól távolabbi húr ($h_2$) egyenesét a másik húr egyenesére tükrözve a kapott $h_1$ és $h_2'$ húrok együttes hossza nyilván nagyobb, mint $h_1$ és $h_2$ hosszának összege (*1. ábra*).

Ezt a lépést véges sokszor ismételve elérhetjük, hogy a kör középpontja a két húr közt helyezkedjék el. Eközben a két húr távolsága a középponttól nem változik. Ilyen esetben, ha a kör középpontjának az egyik húrtól való távolsága $c$, akkor Pitagorasz tétele szerint a két húr együttes hossza (*2. ábra*): $2\left(\sqrt{1-c^2}+\sqrt{1-(a-c)^2}\right)$.




*2. ábra*

Elegendő tehát megmutatnunk, hogy

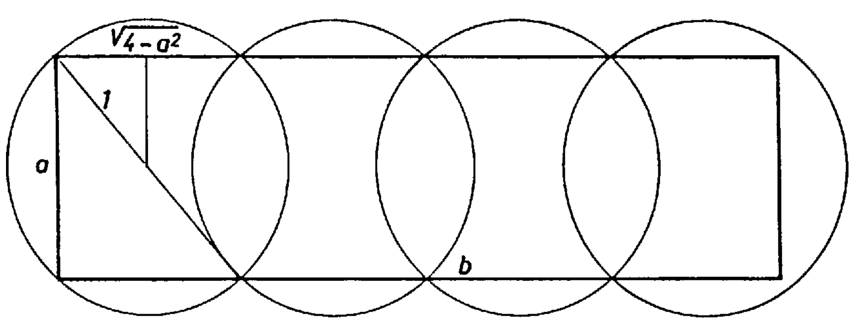
$$\sqrt{1-c^2}+\sqrt{1-(a-c)^2} \leq 2\sqrt{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}. \tag{1}$$

Négyzetre emelve és rendezve:

$$\sqrt{(1-c^2)(1-(a-c)^2)} \leq 1+c^2-ac.$$

Ismét négyzetre emelve és rendezve: $0 \leq (2c-a)^2$.

Ez nyilván igaz, s mivel mindig pozitív számokat emeltünk négyzetre, ezért (1) is fennáll. Tehát egy egységsugarú kör a téglalap két $b$ hosszúságú oldalából összesen legfeljebb $2\sqrt{4-a^2}$ hosszú darabot fed le. Ha viszont a körök lefedik a teljes téglalapot, akkor le kell hogy fedjék a $2b$ hosszúságú oldalakat is. Ezért a lefedéshez legalább $\left\lceil \frac{b}{\sqrt{4-a^2}} \right\rceil$ darab körre van szükség.

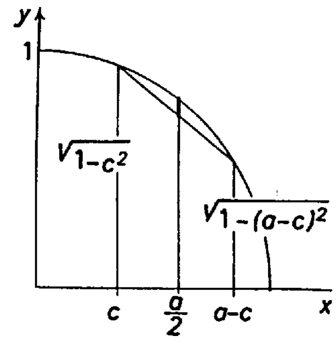



*3. ábra*

Könnyen látható, hogy ennyi viszont elég is. Ha a köröket a *3. ábrán* látható módon helyezzük el – középpontjaik a téglalap egyik szimmetriatengelyén, metszéspontjaik pedig a téglalap kerületén vannak –, akkor lefedik a téglalapot.

Ezzel állításunkat beláttuk.

*Megjegyzés.* Az (1) egyenlőség egyszerűbben következik abból, hogy az $y = \sqrt{1 - x^2}$ függvény (amelynek képe egy negyedkör) alulról konvex (*4. ábra*).




*4. ábra*