

Legyen a háromszög átfogójának a felezőpontja F , és használjuk az *ábra* további jelöléseit is. A C csúcs körül $CE = CH$ sugárral húzott kör a belsejében tartalmazza a CF súlyvonal és a beírt kör C -hez közelebbi N metszéspontját, így

$$CN < CE = \frac{a+b-c}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \frac{c}{2} = c \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right) < \frac{c}{3} = \frac{2}{3}CF.$$

1993-02-069-1.eps

Mivel a háromszög derékszögű, és M a súlypontja, azért $CM = \frac{2}{3}CF = \frac{c}{3}$.

Írjuk fel először a C , majd az F pontnak a beírt körre vonatkozó hatványát a szelőtétel felhasználásával:

$$(1) \quad CN \cdot \frac{c}{3} = \left(\frac{a+b-c}{2} \right)^2,$$

$$(2) \quad \frac{c}{6} \left(\frac{c}{2} - CN \right) = FG^2 = \left(\frac{b-a}{2} \right)^2.$$

Az (1) egyenletet a (2) kétszereséhez adva:

$$\frac{c^2}{6} = \frac{(b-a)^2}{2} + \left(\frac{a+b-c}{2} \right)^2.$$

Mindkét oldalt $\frac{12}{c^2}$ -tel szorozva:

$$\begin{aligned} 2 &= 6(\sin \beta - \cos \beta)^2 + 3(\cos \beta + \sin \beta - 1)^2, \\ 6(\cos \beta + \sin \beta) &= -3 \sin 2\beta + 10. \end{aligned}$$

Itt mindkét oldal a β hegyesszög bármely értékére pozitív, így négyzetreemeléssel az eredetivel ekvivalens egyenlethez jutunk:

$$36(1 + \sin 2\beta) = 9 \sin^2 2\beta - 60 \sin 2\beta + 100.$$

A $\sin 2\beta$ -ra kapott másodfokú egyenlet 0 és 1 közé eső megoldása $\sin 2\beta = \frac{16 - 8\sqrt{3}}{3}$, tehát a keresett hegyesszögek: $22,8^\circ$ és $67,2^\circ$.