Tegyük fel, hogy $x^2+y^2+z^2 < 3/4$. Ezt, valamint a mértani és a négyzetes közép közti egyenlőtlenséget felhasználva

$$\sqrt[3]{xyz} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} < \frac{1}{2} \quad \text{adódik.}$$

Innen $xyz < 1/8$, vagyis – ismét figyelembe véve az indirekt feltevést is –

$$x^2+y^2+z^2+2xyz < \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} = 1.$$

Ez ellentmond a feladat feltételének, tehát indirekt feltevésünk hamisnak bizonyult, s így

$$x^2+y^2+z^2 \ge \frac{3}{4}.$$

Könnyen megállapíthatjuk az egyenlőség fennállásának feltételét. Ekkor ugyanis

$$x^2+y^2+z^2 = \frac{3}{4},$$

valamint

$$xyz = \frac{1-x^2-y^2-z^2}{2} = \frac{1}{8},$$

tehát

$$\sqrt[3]{xyz} = \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}},$$

amiből $|x| = |y| = |z| = \dfrac{1}{2}$ következik, és x, y, z közül pontosan páros számú lehet negatív.

Megjegyzés. A négyzetes és a geometriai közép közti egyenlőtlenséget általában nemnegatív számok esetén szoktuk alkalmazni. A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség például nem is igaz negatív számokra, amint azt a következő példa mutatja:

$$\frac{-8-8}{2} = -8 < \sqrt{(-8)(-8)} = 8.$$

A jelen esetben viszont nyilvánvalóan

$$\sqrt[3]{xyz} \le |\sqrt[3]{xyz}| = \sqrt[3]{|x||y||z|} \cdot \sqrt{\frac{|x|^2+|y|^2+|z|^2}{3}} = \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}.$$

Egyenlőség fennálltakor $|x| = |y| = |z|$ és $xyz = |xyz|$ teljesül, amiből

$$|x| = x = y = z;\; x = y = -|z| = -z;\; x = -|y| = -y = z;\; -|x| = -x = y = z$$

valamelyike adódik.