

Minden egész szám felírható $10a + b$ alakban, ahol a, b egész számok és $0 \leq b \leq 9$. Ennek a huszadik hatványa a binomiális tétel alapján

$$(10a)^{20} + \binom{20}{1} \cdot (10a)^{19} \cdot b + \dots + \binom{20}{19} (10a) \cdot b^{19} + b^{20}.$$

Itt az első 19 tag nyilván osztható százzal, sőt a huszadik is: $\binom{20}{19} \cdot (10a) \cdot b^{19} = 200 \cdot a \cdot b^{19}$. Tehát $(10a + b)^{20}$ utolsó két jegye megegyezik b^{20} utolsó két jegyével, és $0 \leq b \leq 9$. Számoljuk ki ezeket!

Nyilván 0^{20} utolsó két jegye 00, 1^{20} pedig 01-re végződik. Továbbá $2^{20} = 1\,048\,576$, ennek utolsó két jegye 76. Az is látszik, hogy 5^{20} 25-re végződik, mert $5^2 = 25$, s ebből rendre az utolsó két jegy 5-tel való szorzásával kapjuk 5 magasabb hatványainak utolsó két jegyét; de $5 \cdot 25 = 125$ is 25-re végződik, ezért 5^{20} is.

A binomiális tételből $(10 - b)^{10} - b^{10} = 10^{10} - \binom{10}{1} \cdot 10^9 \cdot b + \binom{10}{2} \cdot 10^8 \cdot b^2 - \dots - \binom{10}{9} \cdot 10 \cdot b^9$, és a fentihez hasonlóan ez osztható százzal. Tehát b^{10} ugyanarra a két jegyre végződik, mint $(10 - b)^{10}$, és így b^{20} és $(10 - b)^{20}$ utolsó két jegye is megegyezik. Ebből máris adódik, hogy 9^{20} is 01-re végződik, 8^{20} pedig 76-ra. $b = 3$ esetén is $3^{20} = 9^{10}$, és 9^{10} utolsó két jegye megegyezik 1^{10} utolsó két jegyével, vagyis 3^{20} is 01-re végződik. Ekkor ugyanez áll 7^{20} -ra is.

Nézzük még a $b = 4$ esetet. Erre $4^{20} = (2^{20})^2$, ám 2^{20} utolsó két jegye 76, így 4^{20} ugyan arra a két jegyre végződik, mint 76^2 , de $76^2 = 5776$, tehát 4^{20} utolsó két jegye 76, s így 6^{20} -é is az.

Összefoglalva: egy egész szám huszadik hatványának utolsó két jegye 00, 01, 25, 76 valamelyike lehet.