

Mivel az

$$(x-1) \cdot p(x+1) = (x+2) \cdot p(x)$$

egyenlőségnek minden  $x$ -re teljesülnie kell, így a következő speciális értékekre is:  $x = 1$ , ekkor  $0 = 3 \cdot p(1)$ , azaz  $p(1) = 0$ ;  $x = -2$ , ebből  $-3 \cdot p(-1) = 0$ , tehát  $p(-1) = 0$ ; továbbá  $x = -1$ , erre  $-2 \cdot p(0) = p(-1) = 0$ , azaz  $p(0) = 0$  adódik.

Ezek szerint a  $p(x)$  polinom

$$(x-1)x(x+1)g(x)$$

alakú. Ezt behelyettesítve

$$(x-1)x(x+1)(x+2) \cdot g(x+1) = (x+2) \cdot (x-1)x(x+1) \cdot g(x)$$

alapján  $g(x) = g(x+1)$  kell, hogy fennálljon minden  $(1, 0, -1, 2$ -től különböző)  $x$ -re, s az összes ilyen (nem azonosan nulla)  $g$  jó is. Így például a konstans  $g(x) = a$  polinomot véve ( $a \neq 0$ ),  $p(x) = a(x-1)x(x+1) = ax^3 - ax$  megfelelő.

*Megjegyzés.* Könnyen látható, hogy a fenti  $g(x+1) = g(x)$  feltételnek csak a konstans polinomok tesznek eleget. Valóban, legyen  $g(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_0$ , ahol  $n \geq 1$ ,  $a_n \neq 0$ . Ekkor

$$\begin{aligned} g(x+1) &= a_n(x+1)^n + \dots + a_0 = a_n \cdot x^n + a_n \cdot \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} + \dots \\ &\dots + a_n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-1} \binom{n-1}{1} x^{n-2} + \dots + a_{n-1} + \dots + a_0 = \\ &= a_n \cdot x^n + \left( a_n \cdot \binom{n}{1} + a_{n-1} \right) \cdot x^{n-1} + \dots + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_0). \end{aligned}$$

Mivel  $a_n \neq 0$  és  $n \geq 1$ , így  $a_{n-1} \neq a_n \cdot \binom{n}{1} + a_{n-1}$  miatt  $g(x) \neq g(x+1)$ , hiszen két polinom pontosan akkor egyenlő, ha minden együtthatójuk egyenlő. Tehát, ha  $g(x) \neq a$ , akkor nem teljesülhet rá ez a feltétel.