Először azt mutatjuk meg, hogy

$$7^3|a^2+ab+b^2 \iff 7^3|(18a-b)(18b-a).$$

Valóban, $(18a-b)(18b-a)=-18a^2-18b^2+325ab=7^3ab-18(a^2+ab+b^2)$, amiből a fenti ekvivalencia nyilvánvaló.

Ha most olyan a, b számokat tekintünk, amelyekre $7\nmid a$ és $7\nmid b$ teljesül, akkor

$$7^3|(18a-b)(18b-a) \iff 7^3|18a-b \quad \text{vagy} \quad 7^3|18b-a$$

is fennáll. Tegyük fel ugyanis, hogy $7^3|(18b-a)(18a-b)$, de $7^3\nmid 18a-b$ és $7^3\nmid 18b-a$. Ekkor szükségképpen $7|18a-b$ és $7|18b-a$, amiből $7|18a-b+18b-a=17a+17b$ adódik. Ebből $7|a+b$, majd $7|(18a-b)+(a+b)=19a$ következik, tehát $7|a$ teljesül.

Ezzel az egyik irányú következtetést beláttuk, a másik pedig nyilvánvaló. Tehát

$$7^3|a^2+ab+b^2,\quad 7\nmid a,\quad 7\nmid b \iff 7\nmid a,\quad 7\nmid b \quad \text{és} \quad 7^3|18a-b \quad \text{vagy} \quad 7^3|18b-a.$$

Ezek szerint a feltételeket kielégítő számpárok mind olyanok, amelyekre

$$7\nmid a,\quad 7\nmid b \quad \text{és} \quad 7^3|18a-b \quad \text{vagy} \quad 7^3|18b-a,$$

és az ilyen számpárok valamennyien jók is. Ezzel tehát megadtuk az összes megoldást; egy ilyen például az $a=1$, $b=18$:

$$a^2+ab+b^2=1+18+18^2=343=7^3.$$

Megjegyzés. Természetesen nem kellett az összes megoldást megadni ahhoz, hogy valaki 5 pontot kapjon dolgozatára – a kitűzésben csak egy számpár megadása volt a feladat.