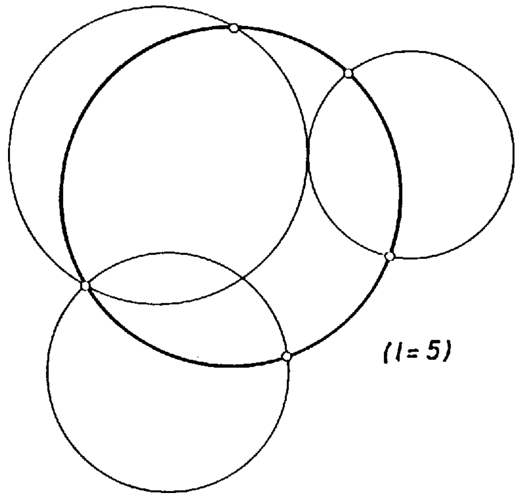
Nevezzünk egy körökből álló halmazt összefüggőnek, ha bármely körvonal tetszőleges pontjából a köríveken haladva el tudunk jutni az összes többi körvonalhoz. A továbbiakban a következő állítást bizonyítjuk:

Ha a körökből álló M halmaz pontosan m darab összefüggő részre bomlik, és pontosan k darab pont illeszkedik legalább két körre, akkor ezek a körök legalább $k+m+1$ részre osztják a síkot.

Először legyen $m=1$, azaz M összefüggő. Kezdjük el egymás után lerajzolni a köröket úgy, hogy a kapott körhalmaz mindig összefüggő legyen. Ezt megtehetjük, hiszen M összefüggősége miatt minden lépésben lesz olyan, még le nem rajzolt kör, amely metszi vagy érinti a már lerajzoltak valamelyikét.



1. ábra

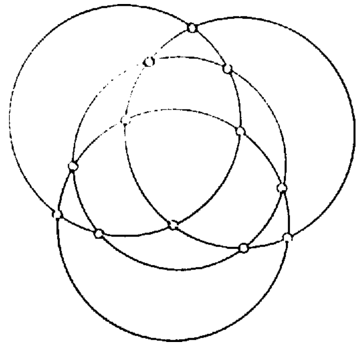
Legyen az n-edik lépésben lerajzolt körnek l darab közös pontja a már korábban lerajzoltakkal; ekkor $l \geq 1$. Ezt a kört az l pont l darab ívre osztja, és mindegyik ív egy zárt síkrészt oszt ketté, vagy a végtelen síkrészből kerít le egy zárt darabot (*1. ábra*). Tehát a síkrészek száma az n-edik lépésben l-lel, a körök metszés, ill. érintési pontjainak száma pedig legfeljebb l-lel nő, hiszen az n-edik lépésben berajzolt körnek a már korábban berajzoltakkal keletkező l darab közös pontja között lehetnek olyanok, amelyek már az n-edik lépés előtt is legalább két körre illeszkedtek.

Az első lépésben a lerajzolt egyetlen kör két részre osztja a síkot, és a legalább két körre illeszkedő pontok száma 0. Az előzőek szerint minden lépésben legalább annyival nő a síkrészek száma, mint a körök metszés, ill. érintési pontjainak a száma, így – miután összesen k darab pont illeszkedik legalább két körre – a keletkező síkrészek száma legalább $k+2$.

Áttérve az $m>1$ esetre, ha az i-edik összefüggő részben $(i=1,2,\ldots,m)$ a köröknek k_i darab metszés-, ill. érintési pontja van, akkor ebben a részben legalább k_i+2 darab síkrész keletkezett (a végtelen síkrésszel együtt). Figyelembe véve, hogy $\sum_{i=1}^{m} k_i = k$, valamint azt, hogy a végtelen síkrészt az m darab összefüggő rész mindegyikében számoltuk, az összesen keletkező síkrészek száma legalább

$$\sum_{i=1}^{m}(k_i+2)-(m-1)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m} k_i+2m-(m-1)=k+m+1.$$



2. ábra

A feladatban $k=12$, tehát a síkrészek minimális száma 14. Ennyi síkrész keletkezik például akkor, ha négy, páronként metsző körünk van (*2. ábra*).