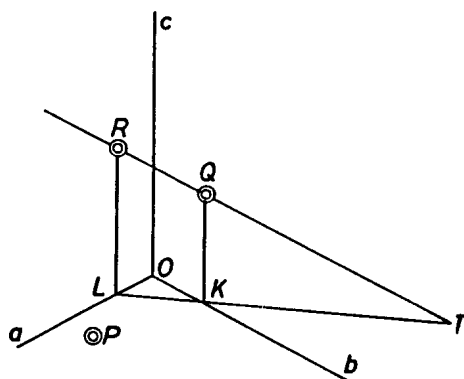
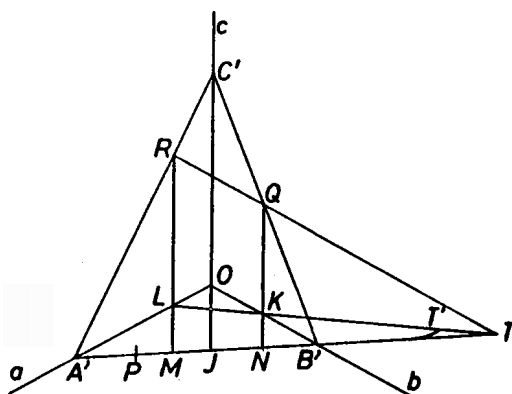


Tekintsük a feladatot megoldottnak. Jelöljük a három félegyenesest  $a$ ,  $b$ ,  $c$ -vel, a közös végpontjukat  $O$ -val, a három szögtartományban adott pontokat pedig az 1. ábrán látható elhelyezkedés szerint  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ -rel. Húzzunk  $Q$ -n és  $R$ -en át párhuzamosokat  $c$ -vel, messék ezek  $b$ -t és  $a$ -t  $K$ -ban, illetve  $L$ -ben, végül  $QR$  és  $KL$  metszéspontját jelöljük  $T$ -vel.



1. ábra



2. ábra

Legyen  $C'$  olyan pontja a  $c$  félegyenesnek, amelyre  $C'R$  metszi  $a$ -t,  $C'Q$  pedig metszi  $b$ -t. (Ez teljesül, ha  $C'$  „elég messze” van  $O$ -tól.) Legyen a két metszéspont  $A'$ , illetve  $B'$  (2. ábra). Megmutatjuk, hogy az  $A'B'$  egyenes –  $C'$  helyzetétől függetlenül – mindig átmegy  $T$ -n. Jelöljük  $A'B'$  és  $LK$  metszéspontját  $T'$ -vel. Bebonyolítjuk, hogy  $T' \equiv T$ . Legyen az  $RL$ ,  $C'O$  és  $QK$  egymással párhuzamos egyeneseknek  $A'B'$ -vel való metszéspontja rendre  $M$ ,  $J$  és  $N$ . Mivel  $RM \parallel C'J$  és  $C'J \parallel QN$ , ezért

$$\frac{RL}{LM} = \frac{C'O}{OJ} \text{ és } \frac{C'O}{OJ} = \frac{QK}{KN}, \text{ vagyis } \frac{RL}{LM} = \frac{QK}{KN}.$$

Átrendezve  $\frac{KN}{LM} = \frac{QK}{RL}$ .

Másrészt  $KN$  és  $LM$  az  $LT'M$  szög,  $QK$  és  $RL$  pedig az  $RTL$  szög párhuzamos szelői, ezért

$$\frac{KN}{LM} = \frac{KT'}{LT'} \text{ és } \frac{QK}{RL} = \frac{KT}{LT}, \text{ vagyis } \frac{KT'}{LT'} = \frac{KT}{LT}.$$

Ez utóbbi viszont csak akkor teljesülhet, ha  $T' \equiv T$ . Tehát  $A'B'$  mindig átmegy  $T$ -n.

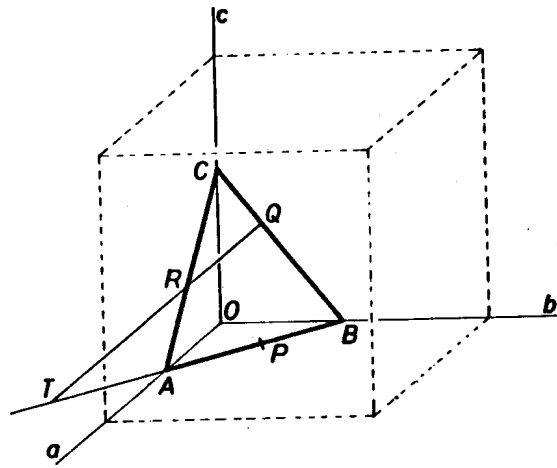
Ezek alapján a szerkesztés menete a következő:  $R$  és  $Q$  ismeretében megszerkesztjük a  $T$  pontot. A  $TP$  egyenes kimetszi az  $a$  és  $b$  félegyenesekből az  $A$  és  $B$  pontokat, végül  $AR$  és  $c$  közös pontja lesz  $C$ . A párhuzamos szelők tételének segítségével könnyen belátható, hogy az így szerkesztett  $ABC$  háromszög  $BC$  oldala átmegy  $Q$ -n, tehát a háromszög eleget tesz a feladat feltételeinek. (Ha az  $RQ$  és  $LK$  egyenesek párhuzamosak, akkor a szerkesztésben  $TP$  szerepét a  $P$ -n átmenő,  $RQ$ -val párhuzamos egyenes veszi át.)

A feladatnak mindig egy megoldása van, hacsak az adódó  $A, B$  pontpárra  $AO > KO$  és  $BO > LO$ .

Róka Dániel (Budapest, Szt. István Gimn., II. o. t.) dolgozata alapján

*Megjegyzések* 1. A megoldás során nem használtuk ki, hogy a szögtartományok  $120^\circ$ -osak. Ez a feltétel csak a diszkussziót teszi egyszerűvé.

2. Feladatunk tulajdonképpen a következő egyszerű térgeometriai feladat síkra vetített változata: *Adott egy kocka három szomszédos lapján a  $P$ ,  $Q$  és  $R$  pont. Szerkesszük meg a három lap közös csúcsából kiinduló három élen az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  pontokat úgy, hogy az  $ABC$  háromszög oldalai átmenjenek a  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  pontokon* (3. ábra).



3. ábra

Ennek megoldása egyszerű: a  $PQR$  sík kimetszi az élekből az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  pontokat. Viszont ez a megoldás mutatja az eredeti megoldásunkban nagyon fontos  $T$  pont szerepét:  $T$  nem más, mint az  $RQ$  egyenesnek és a kocka  $P$ -t tartalmazó lapjának a dőléspontja, ezt  $LK$ -val,  $RQ$ -nak azon a lapon lévő vetületével metszettük ki.