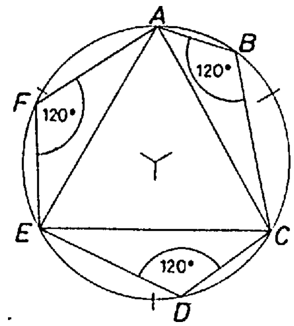
I. megoldás. Nem következik. Egyszerűen konstruálhatunk ellenpéldát:



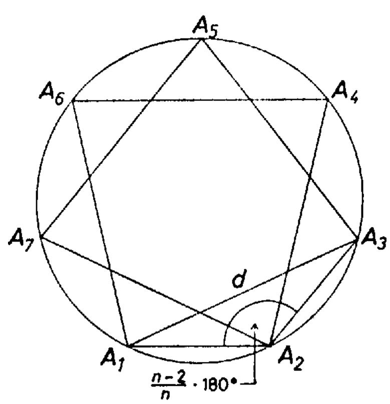
1. ábra

Tekintsük az ACE szabályos háromszöget és a körülírt körét. Legyenek a B, D, F pontok rendre a kisebbik AC, CE, EA íveknek a felezőponttól különböző pontjai (*1. ábra*). Ekkor az $AECB$ négyszög húrnégyszög, tehát $ABC\sphericalangle = 180° - AEC\sphericalangle = 180° - 60° = 120°$. Hasonlóan látható be, hogy $CDE\sphericalangle = EFA\sphericalangle = 120°$. Vagyis az $ABCDEF$ hatszögnek (legalább) három $120°$-os szöge van, de nem szabályos, mert például $AB \neq BC$. (Tulajdonképpen az is elég, ha B, D, F közül csak egyik különböző a felezőponttól.)

Megjegyzés: Könnyen látható, hogy ha a (nem egyenlő szárú) BAC, DCE, FEA háromszögek egybevágóak és azonos körüljárásúak, akkor hatszögünk valamennyi szöge $120°$-os, és az mégsem szabályos.

II. megoldás. A feladatot a következő, általános esetben oldjuk meg: *Egy körbe írt n-szögnek minden szöge egyenlő. Következik-e ebből, hogy a sokszög szabályos?*

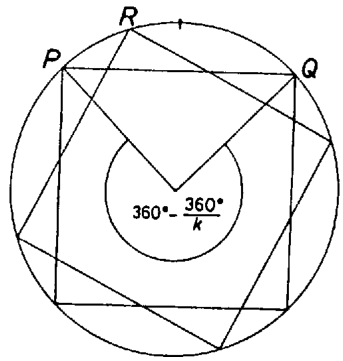
Először megmutatjuk, *ha n páratlan*, akkor a válasz igenlő. Tudjuk, hogy egy (konvex) n-szög belső szögeinek összege $(n-2)\cdot 180°$, ezért ha minden szög egyenlő, akkor minden szög $\dfrac{(n-2)\cdot 180°}{n}$. Ha a sokszöget $A_1A_2\ldots A_{2k+1}$ jelöli ($n = 2k+1$), akkor $\dfrac{n-2}{n}\cdot 180° = A_1A_2A_3\sphericalangle = A_2A_3A_4\sphericalangle = \ldots = A_{2k+1}A_1A_2\sphericalangle$.



2. ábra

A sokszög köré írt körben az A_1A_3, A_2A_4, $\ldots$, $A_{2k}A_1$, $A_{2k+1}A_2$ húrokhoz ugyanakkora kerületi szög tartozik, vagyis ezek a húrok egyenlő hosszúak; jelöljük ezt a hosszúságot d-vel (*2. ábra*). Ha tehát az A_1 pontból kiindulva egy irányba haladva mindig d távolságot mérünk fel a körvonalra, akkor rendre az A_3, A_5, $\ldots$, A_{2k+1}, A_2, A_4, $\ldots$, A_{2k} pontokat kapjuk, vagyis meg tudjuk szerkeszteni a sokszöget. Viszont tudjuk, hogy a szabályos n-szögnek is minden szöge $\dfrac{n-2}{n}\cdot 180°$, ezért a szerkesztés során kapott $A_1A_2\ldots A_{2k+1}$ sokszög csak szabályos lehet. Ezzel beláttuk, hogy ha n páratlan, akkor a kérdésre „igen" a válasz.

Ha n páros, akkor viszont a válasz nemleges. Az I. megoldásban leírthoz hasonlóan konstruálunk ellenpéldát. Legyen $n = 2k$, írjunk egy körbe két szabályos k-szöget úgy, hogy azok ne legyenek a kör középpontja körül $\dfrac{2\pi}{n} = \dfrac{\pi}{k}$ nagyságú szöggel egymásba forgathatók. Ez azt jelenti, hogy az egyik k-szög bármely PQ oldalához tartozó kisebbik ív felezőpontja nem csúcsa a másik k-szögnek. Ezen az íven a másik k-szögnek nyilván pontosan egy R csúcsa van, amire az előbbiek szerint $PR \neq RQ$, viszont $PRQ\sphericalangle = \dfrac{1}{2}\left(360° - \dfrac{360°}{k}\right) = 180\cdot\dfrac{n-2}{n}$ (*3.ábra*).



3. ábra

A két k-szög csúcsainak konvex burkaként kapott n-szögnek tehát minden szöge egyenlő, de oldalai között vannak különbözőek.

Kálmán Tamás (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o. t.)