I. megoldás. Az

$$f(x) = x^2 - x(a+b+c) + ab + bc + ca$$

jelöléssel azt kell igazolnunk, hogy $f(d) \geqq 0$. Könnyen látható, hogy

$$x \cdot f(x) - abc = (x-a)(x-b)(x-c),$$

tehát

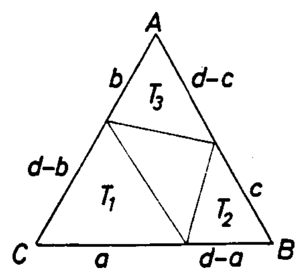
$$f(d) = \frac{(d-a)(d-b)(d-c) + abc}{d}, \tag{1}$$

ahonnan a bizonyítandónál élesebb

$$f(d) \geqq \frac{abc}{d}$$

egyenlőtlenséget kapjuk, hiszen (1) számlálójában $(d-a)(d-b)(d-c) \geqq 0$.

II. megoldás. Az alábbi megoldás geometriai jelentést tulajdonít a feladatban szereplő mennyiségeknek. Tekintsünk egy d oldalú ABC szabályos háromszöget, melynek csúcsaiból az ábra szerint azonos körüljárás szerint mérjük fel az a, b illetve a c hosszúságú szakaszokat.



Az A, B és C csúcsú kis háromszögek területének összege nyilván kisebb, mint az ABC háromszögé. A területeket a 60°-os szög felhasználásával felírva

$$T_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a(d-b); \qquad T_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} c(d-a);$$

$$T_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} b(d-c); \qquad T_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot d^2.$$

A $T_1 + T_2 + T_3 < T$ egyenlőtlenség mindkét oldalát $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$-gyel osztva a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.

Megjegyzés. Mindkét bizonyításból kiderül, hogy a feltételek mellett a bizonyítandó egyenlőtlenségben nem állhat egyenlőség.