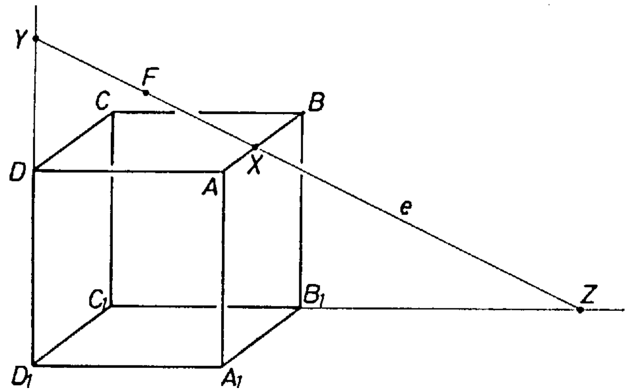
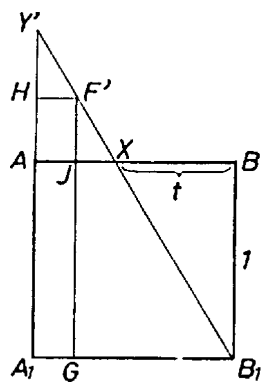
I. megoldás. Három esetet különböztetünk meg attól függően, hogy X az AB él belső pontja, vagy pedig a szakasz A-n, vagy B-n túli meghosszabbításán helyezkedik el. A részletes számításokat abban az esetben végezzük el, ha X az AB él belső pontja.



1. ábra

Jelöljük F-fel az XY szakasz felezőpontját. X, illetve Y az egymással párhuzamos ABA_1B_1, illetve CDC_1D_1 sík egy-egy pontja, ezért F rajta van e két sík középpárhuzamos síkján; tehát F távolsága e két lapsíktól $\frac{1}{2}$. Vetítsük a kockát és az e egyenest az ABA_1B_1 oldallap síkjára. F és Y vetülete legyen F' és Y', az F'-ből az AA_1BB_1 négyzet oldalaira bocsátott merőlegesek talppontjai pedig a *2. ábra* szerint G, H és J.



2. ábra

A merőleges vetítés megőrzi a képsíkkal párhuzamos szakaszok hosszát és az egy egyenesre illeszkedő szakaszok arányát; ezért $F'G$ megegyezik F-nek az $A_1B_1C_1D_1$ laptól való távolságával, $F'H$ pedig F-nek az ADA_1D_1 laptól való távolságával, továbbá F' az $Y'X$ szakasz felezőpontja. Az $Y'AX$ és a B_1BX derékszögű háromszögek hasonlósága folytán

$$\frac{Y'A}{AX}=\frac{B_1B}{BX}, \quad \text{vagyis} \quad Y'A=\frac{AX\cdot B_1B}{BX}=\frac{(1-t)\cdot 1}{t}=\frac{1-t}{t}.$$

Ezért

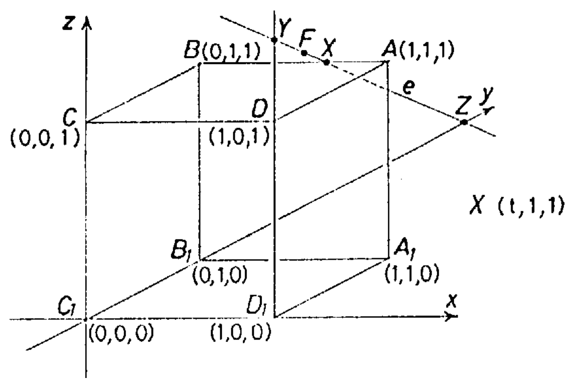
$$F'J=\frac{1}{2}Y'A=\frac{1-t}{2t}, \quad F'G=F'J+JG=\frac{1-t}{2t}+1=\frac{1+t}{2t},$$
$$F'H=\frac{1}{2}AX=\frac{1-t}{2},$$

végül pedig F-nek a BCB_1C_1 laptól való távolsága $1-F'H=\dfrac{1+t}{2}$.

Lényegében ugyanígy határozhatjuk meg a távolságokat akkor is, ha X az AB szakasz valamelyik meghosszabbításán van. Az eredményeket a következő táblázatban foglaljuk össze:

a lap	F távolsága a laptól, ha X az AB szakasz belső pontja	A-n túli meghosszabbításán van	B-n túli meghosszabbításán van
$ABCD$	$\frac{1-t}{2t}$	$\frac{t-1}{2t}$	$\frac{1+t}{2t}$
$A_1B_1C_1D_1$	$\frac{1+t}{2t}$	$\frac{1+t}{2t}$	$\left\lvert\frac{1-t}{2t}\right\rvert$
ABA_1B_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
CDC_1D_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
ADA_1D_1	$\frac{1-t}{2}$	$\frac{t-1}{2}$	$\frac{1+t}{2}$
BCB_1C_1	$\frac{1+t}{2}$	$\frac{1+t}{2}$	$\left\lvert\frac{1-t}{2}\right\rvert$

II. megoldás. Helyezzük el a kockát egy térbeli derékszögű koordináta rendszerben úgy, hogy C_1 legyen az origó, D_1, B_1 és C pedig rendre az x, y, z tengely pozitív felére illeszkedjen. Ekkor A koordinátái $(1;1;1)$, B koordinátái $(0;1;1)$, hasonlóan $C(0;0;1)$, $D(1;0;1)$, $A_1(1;1;0)$, $B_1(0;1;0)$, $C_1(0;0;0)$, D_1 pedig $(1;0;0)$. Az AB egyenes az $y=1$ egyenletű ABA_1B_1 és a $z=1$ egyenletű $ABCD$ síkok metszésvonala, tehát az erre az egyenesre illeszkedő X pont második és harmadik koordinátája is 1. Legyen X első koordinátája t; ekkor $BX=|t|$ (*3. ábra*).



3. ábra

Az e egyenes metszi a B_1C_1 egyenest, tehát benne van a B_1C_1X síkban. A B_1, C_1 és X pontok koordinátái kielégítik az $x=tz$ egyenletet, tehát ez a B_1C_1X sík egyenlete. Az Y pont rajta van a B_1C_1X, az ADA_1D_1 és a CDC_1D_1 síkokon. E két utóbbi egyenlete, $x=1$ és $y=0$. Tehát Y koordinátái kielégítik az $x=1$, $y=0$ és $y=tz$ egyenleteket, azaz $Y\left(1;0;\frac{1}{t}\right)$. Így XY felezőpontjának koordinátái:

$$F\left(\frac{1}{2}(t+1);\frac{1}{2}(1+0);\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t}\right)\right).$$

A kocka oldallapjainak egyenletei és F-nek ezen oldallapoktól való távolsága:

$$\begin{array}{lll}
ABCD: & z=1 & \left|\frac{1+t}{2t}-1\right|=\left|\frac{1-t}{2t}\right|; \\
A_1B_1C_1D_1: & z=0 & \left|\frac{1+t}{2t}\right|; \\
ABA_1B_1: & y=1 & \left|\frac{1}{2}-1\right|=\frac{1}{2}; \\
CDC_1D_1: & y=0 & \left|\frac{1}{2}-0\right|=\frac{1}{2}; \\
ADA_1D_1: & x=1 & \left|\frac{1+t}{2}-1\right|=\left|\frac{t-1}{2}\right|; \\
BCB_1C_1: & x=0 & \left|\frac{1+t}{2}\right|.
\end{array}$$

(Ezekből a képletekből egyszerű számolással kaphatjuk az I. megoldás végén található táblázatot, ha felhasználjuk, hogy $BX=|t|$.)